详细解答

STEP II 1987，第 14 题

力学 · 圆锥上的弹性带

> **STEP II 1987，第 14 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q14

关键思路

由于橡皮圈在圆锥上始终保持为一个水平圆，它的整个状态只需一个数便可描述：它沿母线（generator）量度与顶点（vertex）的距离 s。因此我们只需追踪一小段元素。张力（tension）产生的向内拉力有一个沿圆锥面的分量，推动该元素沿母线移动；另有一个垂直于圆锥面的分量，被光滑的圆锥抵消。把 s 换成长度 x，便得到简谐运动（simple harmonic motion），而橡皮圈在四分之一个周期（period）后变得松弛（slack）。

解答

模型。 我们把橡皮圈视为一条质量为 m、沿圆周均匀分布的细弹性弦。圆锥是光滑的，所以它对每一小段的反作用力都垂直于圆锥面；我们亦忽略重力。由对称性，每一小段的运动方式都相同，所以橡皮圈始终是一个以轴为圆心的圆。设它沿母线量度与顶点的距离为 $s(t)$。由于每条母线与轴成角 α，它的半径便是 $s\sin\alpha$，因此

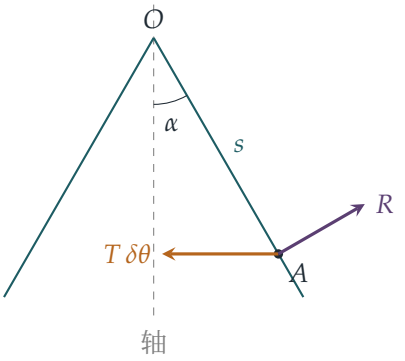
$$x = 2\pi s\sin\alpha.$$

当橡皮圈被拉伸时（$x > l$），胡克定律（Hooke's law）给出张力 $T = \dfrac{\lambda(x-l)}{l}$。

作用于一小段的力。 取一小段在轴上所对的角为 $\delta\theta$。它占整条橡皮圈的 $\delta\theta/2\pi$，所以其质量为 $\dfrac{m\,\delta\theta}{2\pi}$。作用于它的力有两个：

- 题目给出、由张力产生的力 $T\,\delta\theta$，垂直于轴并指向轴；
- 圆锥的法向反作用力（normal reaction）R，垂直于经过该小段的母线。

下图显示包含轴和该小段的平面。



该小段被限制在圆锥面上，所以只能沿母线 OA 移动。我们沿这个方向及其垂直方向分解力。力 $T\,\delta\theta$ 垂直于轴，而母线与轴成角 α，所以 $T\,\delta\theta$ 与方向 $\overrightarrow{AO}$ 之间的夹角是 $90^\circ - \alpha$。因此：

- 沿 $\overrightarrow{AO}$（指向顶点）的方向，$T\,\delta\theta$ 的分量是 $T\,\delta\theta\cos(90^\circ - \alpha) = T\,\delta\theta\sin\alpha$，而 R 在此方向没有分量；
- 在垂直于圆锥面的方向，由于该方向没有运动，$R = T\,\delta\theta\cos\alpha$。

由于 $R \geq 0$，橡皮圈确实一直紧贴圆锥。

> ? **想一想** 为甚么我们不能直接说向内的力 $T\,\delta\theta$ 令半径缩小?

该小段不能直接向轴移动，因为圆锥挡住了去路。只有 $T\,\delta\theta$ 沿圆锥面的部分会产生加速度，其余部分被反作用力抵消。因子 $\sin\alpha$ 正是由此而来；这与光滑斜面上的珠子沿斜面只受 $mg\sin\theta$ 的道理相同。

运动方程。 对该小段沿母线应用牛顿第二定律（Newton's second law），并取 s 以远离顶点为正方向，得

$$\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -T\,\delta\theta\sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2\pi T\sin\alpha}{m}.$$

$\delta\theta$ 被消去，所以每一小段都服从同一条方程，这证实了橡皮圈保持圆形。由于 $x = 2\pi s\sin\alpha$ 而 α 是常数，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 2\pi\sin\alpha\,\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi^2 T\sin^2\alpha}{m} = -\frac{4\pi^2\lambda}{ml}(x-l)\sin^2\alpha,$$

其中用了 $T = \lambda(x-l)/l$。此式在橡皮圈拉紧时成立，即对 $0 < t < t_0$ 成立，整理后便得所求方程。 □

求 t_0。设 $y = x - l$ 及 $\omega^2 = \dfrac{4\pi^2\lambda\sin^2\alpha}{ml}$，则 $\ddot{y} = -\omega^2 y$，即绕 $y = 0$ 的简谐运动。设 $x_0 > l$ 为初始长度（橡皮圈是被推上去的，所以开始时处于拉伸状态）。橡皮圈由静止释放，所以 $\dot{y}(0) = 0$，故

$$x - l = (x_0 - l)\cos\omega t.$$

当 x 首次降至 l，即 $\cos\omega t = 0$ 首次成立时，橡皮圈变得松弛，所以 $\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$。由于 $\omega = 2\pi\sin\alpha\sqrt{\lambda/(ml)}$，

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{4\sin\alpha}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}.$$

留意 t_0 与橡皮圈被拉伸了多少无关，这是简谐运动的典型特征：无论振幅（amplitude）多大，四分之一周期都是一样的。

验算

- 单位：λ 是一个力，所以 ml/λ 的单位是 $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$，而 t_0 是一个时间。
- 极限情况：当 $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ 时，圆锥变平成为一个平面，橡皮圈直接向中心收缩，$t_0 = \frac{1}{4}\sqrt{ml/\lambda}$。当 $\alpha \to 0$ 时，圆锥变成圆柱，张力没有沿圆柱面的分量，而 $t_0 \to \infty$，正合预期。
- 数值验证：取 $\alpha = 30°$、$m = 1$、$l = 1$ 及 $\lambda = 4$，公式给出 $t_0 = \frac{1}{4}$。对随机选取的参数，以数值方法逐步求解该小段的运动方程（并另外在三维空间中直接计算一条精细多边形橡皮圈所受的净张力），均能准确到多个小数位地重现因子 $\sin\alpha$ 及 t_0。

常见错误

- 忘记圆锥的反作用力，对半径 r 写出 $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\ddot{r} = -T\,\delta\theta$。这样会完全漏掉因子 $\sin^2\alpha$。
- 把该小段的质量写成 m，而不是 $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}$。
- 以整个周期或半个周期作为 t_0：橡皮圈由最大拉伸开始，所以经过四分之一周期便回到自然长度（natural length）。

STEP 之外

题目给出的力 $T\,\delta\theta$ 是一个普遍事实的小角度版本：一条张力为 T、曲率半径（radius of curvature）为 ρ 的弦，每单位长度向侧面施加大小为 T/ρ 的力。把同一想法推广到曲面，便能解释为何肥皂泡内的压强大于外面的压强（拉普拉斯定律（Laplace's law））。受限于曲面上的运动，最简洁的处理方法是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics），在其中反

作用力根本无需出现。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）收录了许多关于受张力的弦及受约束运动的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。