详细解答

STEP II 1987，第 13 题

力学 • 与墙壁的斜碰撞

STEP II 1987，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s2-q13

关键思路

光滑（smooth）的台边只能改变垂直于它的速度分量（component）。这个分量会反向并乘以 e，而沿台边方向的分量则保持不变。两条相邻的台边分别作用于两个不同的分量，所以每个分量各被反向并乘以 e 一次。至于闭合路径，我们用坐标追踪圆盘由一条台边到另一条台边的运动，并选取唯一可自由调节的量，即初始斜率（slope），使圆盘回到出发点。

解答

模型。圆盘视为一个质点（particle），在设有光滑台边的光滑水平台面上滑动，因此两次碰撞之间没有任何力作用于它，它以等速沿直线运动。碰撞时，台边施加的冲量（impulse）垂直于台边（因为台边光滑），所以速度的平行分量不变。根据牛顿恢复定律（Newton's law of restitution），垂直分量反向并乘以 e。我们设 $0 < e \leq 1$。

沿台面的两条边设坐标轴，使台面为 $0 \leq x \leq L$、$0 \leq y \leq B$。

第 (i) 部分：两条相邻的台边

设圆盘的速度为 (u, v)。相邻的台边是一条形如 $x =$ 常数 的台边和一条形如 $y =$ 常数 的台边，碰撞次序不限。撞击 x 台边使 $(u, v) \mapsto (-eu, v)$，撞击 y 台边使 $(u, v) \mapsto (u, -ev)$。两者各撞一次后，无论次序如何，速度均为

$$(-eu,\ -ev) = -e\,(u, v).$$

这是原速度的纯量倍数，所以最后的路径与原路径平行，正如所求。此时圆盘沿相反方向运动，速率减为原来的 e 倍。

第 (ii) 部分：从台边出发的闭合路径

设圆盘静止于台边 $y=0$ 上的点 $P=(a,0)$，且 $a:(L-a)=z:1$，于是

$$a=\frac{zL}{1+z},\qquad L-a=\frac{L}{1+z},\qquad 0<a<L.$$

从上方俯视台面，x 向右、y 向上，由台边 $y=0$ 开始顺时针方向，依次遇到 $x=0$、$y=B$，然后是 $x=L$。若比例是从另一端量度，则把 z 换成 $1/z$，论证不变。以速度 $(-u,v)$ 击出圆盘，其中 $u,v>0$，并记斜率为 $k=v/u$。四段路程上的速度依次为

$$(-u,v)\xrightarrow{x=0}(eu,v)\xrightarrow{y=B}(eu,-ev)\xrightarrow{x=L}(-e^2u,-ev)\xrightarrow{y=0}\cdots$$

- 第 1 段，由 $(a,0)$ 至 $x=0$：水平走过距离 a，上升 ak，所以撞击左台边于 $W_1=(0,\,ak)$。
- 第 2 段，斜率为 $v/(eu)=k/e$：上升 $B-ak$，因此横向移动 $e(B-ak)/k$。它在 $W_2=\big(e(B/k-a),\,B\big)$ 碰到顶边。
- 第 3 段，斜率为 $-k$：横向移动 $L-x_{W_2}$，下降 $k(L-x_{W_2})$，所以在高度 $y_{W_3}=B-kL+e(B-ak)$ 处碰到右台边。
- 第 4 段，斜率为 k/e：下降 y_{W_3}，向回移动 $e\,y_{W_3}/k$，到达 $y=0$ 时位于

$$x_{\text{end}}=L-\frac{e\,y_{W_3}}{k}=(1+e)L+e^2a-\frac{e(1+e)B}{k}.$$

我们要求 $x_{\text{end}}=a$。由此得 $e(1+e)B/k=(1+e)L-(1-e^2)a=(1+e)\big(L-(1-e)a\big)$，所以

$$k=\frac{eB}{L-(1-e)a}=\frac{B}{L}\cdot\frac{e(1+z)}{1+ez}.$$

由于 $L-(1-e)a>L-a>0$，对每个 $z>0$，这都是正数。

> ? **想一想** 我们完成了吗？我们假设了圆盘依左、上、右、下的次序碰到台边。

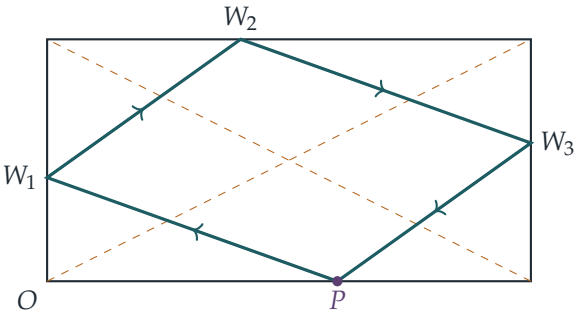
还未完成。我们仍须验证每个碰撞点确实落在我们假设的那条边上。记 $D=L-(1-e)a=L-a+ea$，则 $k=eB/D$。于是

$$\begin{aligned}
y_{W_1}&=ak=\frac{eaB}{D},\\
x_{W_2}&=e\Big(\frac{D}{e}-a\Big)=L-a,\\
y_{W_3}&=B(1+e)-k(L+ea)=\frac{B\big[(1+e)(L-a+ea)-eL-e^2a\big]}{D}=\frac{B(L-a)}{D}.
\end{aligned}$$

由于 $0<a<L$ 及 $e>0$，我们有 $0<ea<D$ 及 $0<L-a<D$。所以 $0<y_{W_1}<B$、$0<x_{W_2}<L$ 及 $0<y_{W_3}<B$。每次碰撞都落在我们假设的那条边（不含端点）上，不会

撞到角位。因此对每个 z，以上述斜率 k 击出的圆盘会依次经过左、上、右台边，然后回到 P。

由第 (i) 部分，第 1 段与第 3 段平行，第 2 段与第 4 段亦平行，所以这条闭合路径是内接于台面的平行四边形（parallelogram）$PW_1W_2W_3$。



虚线是对角线（diagonal）。图中路径取 $L = 2B$、$e = \frac{1}{2}$ 及 $z = 1.5$。

第 (iii) 部分：从任意内点出发的两种击法

*每一种这样的击法都是第 (ii) 部分的路径之一。*设圆盘从内点（interior point）Q 以速度 $\mathbf{w}$ 出发，依顺时针次序在四条台边上的 V_1, V_2, V_3, V_4 反弹，然后回到 Q。应用第 (i) 部分两次：四次反弹后速度为 $(-e)^2\mathbf{w} = e^2\mathbf{w}$，与原速度方向相同。因此最后一段 V_4Q 与第一段 QV_1 位于同一直线上，且方向相同。所以 $V_4 \to Q \to V_1$ 是同一段直线路程，圆盘的路径是一条从台边上的 V_4 出发、顺时针在其余三条台边反弹后回到 V_4 的闭合路径。第 (ii) 部分的推导显示，这种路径的斜率由其起点唯一决定。每条这样的路径在每条边上各有一个顶点，所以它们全都是第 (ii) 部分中的平行四边形 Π_a（$0 < a < L$），而 Q 位于 Π_a 的某条边上。反之，若 Q 位于某个 Π_a 的一条边上，从 Q 沿该边按行进方向击出即可。因此我们要数出通过 Q 的（平行四边形，边）组合的数目。

*当 z 改变时，各边如何扫过台面。*当 z 由 0 增至 ∞，a 由 0 增至 L。由上面的公式，y_{W_1} 由 0 增至 B，$x_{W_2} = L - a$ 由 L 减至 0，而 $y_{W_3} = B/\big(1 + ea/(L-a)\big)$ 由 B 减至 0。所以 Π_a 起初是通过 O 的对角线（当 $a \to 0$ 时，各顶点聚集到角位 O 和 (L, B)），最后变成另一条对角线。现在考虑其中一条边，例如 PW_1。它在角位 O 处截出一个三角形，两条直角边分别是沿底边的 a 和沿左边向上的 y_{W_1}。两条直角边都随 a 严格递增，所以这些三角形严格地一个套一个，其斜边永不相交。它们由无到有连续地增长，直至成为台面在由 $(L, 0)$ 至 $(0, B)$ 的对角线以下的一半。准确地说，若 $Q = (q_1, q_2)$ 位于这一半之中，则函数

$$f(a) = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{y_{W_1}(a)}$$

是连续（continuous）且严格递减（strictly decreasing）的。当 $a \to 0$ 时它趋于 ∞，当

$a \to L$ 时它趋于 $q_1/L + q_2/B < 1$，所以恰好有一个 a 使 $f(a) = 1$（即 Q 位于 PW_1 上）。若 Q 不在这一半之中，则对每个 a 都有 $f(a) > 1$，PW_1 永不通过 Q。同样的论证适用于每条边：

- PW_1 扫过由 $(L, 0)$ 至 $(0, B)$ 的对角线以下的半个台面一次；
- W_2W_3 扫过该对角线以上的半个台面一次；
- W_1W_2 扫过由 O 至 (L, B) 的对角线以上的半个台面一次；
- W_3P 扫过该对角线以下的半个台面一次。

一个不在台边上、也不在对角线上的点 Q，恰好位于每条对角线的某一侧。所以恰好有两条边通过它，而且分属两个不同的平行四边形。这就是那两种击法：每一种都使圆盘沿该边出发，顺时针绕经四条台边后回到 Q。（若 Q 位于对角线上，其中一种击法会退化为射向角位的一击。）

验算

- 当 $e = 1$ 时，对每个 z 斜率都是 $k = B/L$，所以所有边都与对角线平行。这正是对完全弹性台边使用常见的镜像展开（unfolding）方法所得的结果。
- 取 $L = 2$、$B = 1$、$e = \frac{1}{2}$、$z = 1$：则 $a = 1$、$k = \frac{1}{3}$，碰撞点为 $(0, \frac{1}{3})$、$(1, 1)$ 及 $(2, \frac{2}{3})$。最后一段有 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = e/k = \frac{3}{2}$，所以下降 $\frac{2}{3}$ 时向回移动 1，到达 $(1, 0) = P$。
- 在一个逐次计算圆盘由一边到另一边的数值模拟中，三个部分的结论都成立：随机选取的台面、e 值和 z 值都给出预测的碰撞点，而随机选取的内点都恰好位于两条闭合路径上。

常见错误

- 使用镜像（展开）技巧：当 $e < 1$ 时，反射角不等于入射角，所以这技巧失效。
- 由 $x_{\text{end}} = a$ 求得 k 后，没有验证每次碰撞是否落在预期的边上。
- 在第 (iii) 部分中，假设从 Q 出发的击法必须沿某一特定的边开始。正是第 (i) 部分的论证把第一段与最后一段连成同一段直线路程。

STEP 之外

这类路径称为撞球（billiards）问题。当 $e = 1$ 时，它本身就是一个完整的学科，以反射和展开来研究，并通向动力系统（dynamical systems）。这里的台边会损失能量，而“一

圈前的速度 $\mapsto$ 一圈后的速度”这个映射纯粹是乘以 e^2 的缩放。这就是为何对每个 e 都存在闭合轨道，尽管圆盘每绕一圈都会减速。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对冲量和恢复有仔细的讲解。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）收录了更多同类型的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。