详细解答

STEP II 1987，第 12 题

力学 · 平衡与能量

> **STEP II 1987，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q12

关键思路

“在每个位置都处于平衡（equilibrium）”其实是关于势能（potential energy）的陈述：如果珠子（bead）可以停在线上的任何位置，那么珠子沿线滑动时，系统的势能就不会改变，所以势能在线上必须是常数。用珠子的高度及它与环的距离写出这个能量，便立即得到曲线的方程。同一事实也令第二部分变得简洁：势能既然是常数，能量守恒（conservation of energy）便告诉我们珠子与质点的总动能（kinetic energy）是常数，余下的只是一些把两个速率联系起来的几何。

解答

我们把珠子和悬挂的质量视为质点，绳视为轻而不可伸长（inextensible），环和线视为光滑。把环放在原点 O，y 垂直向上量度。设珠子位于极坐标（polar coordinates）(r,θ)，其中 θ 由水平方向逆时针量度，因此珠子相对于 O 的高度是 $y = r\sin\theta$。设 L 为绳的长度。

曲线的方程

由 O 到珠子的一段绳长 r，所以悬挂的质点位于环下方距离 $L - r$ 处。取 O 为零势能水平，系统的势能是

$$V = mgr\sin\theta - mg(L - r) = mg\,(r + r\sin\theta) - mgL.$$

线是光滑的，所以它对珠子的反作用力垂直于线，能使系统沿线移动的力只来自 V。系统在某位置处于平衡，当且仅当 V 在该处对沿线的移动取驻值。在每个位置都平衡，意味着沿整条线都有 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}s = 0$（其中 s 为弧长（arc length）），所以 V 在线上是常数：

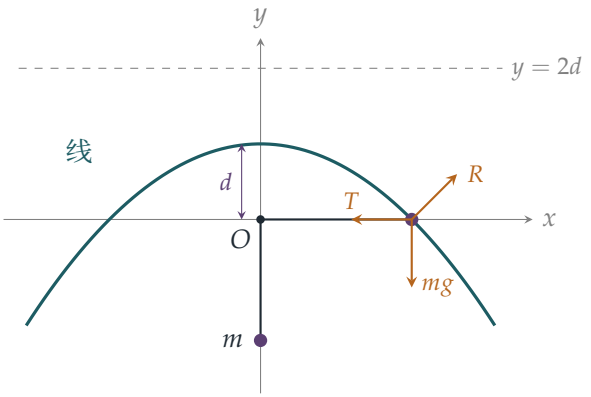
$$r(1 + \sin\theta) = c \quad \text{对某常数} c.$$

用分解力的方法也可以看到这一点。平衡时，悬挂的质点令整条绳的张力（tension）为 mg（环是光滑的）。在珠子上，指向 O 的张力 mg 的切向分量是 $-mg\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$，而重力的切向分量是 $-mg\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$。两者必须抵消，所以 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r+y)=0$，这正是同一条件。

求 c：由于 $1+\sin\theta\le 2$，我们有 $r=c/(1+\sin\theta)\ge c/2$，等号在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时成立（即线上位于环正上方的点）。所以环到线的最短距离是 $c/2$，由此得 $c=2d$，而曲线是

$$\boxed{r(1+\sin\theta)=2d} \qquad \text{即} \qquad r=\frac{2d}{1+\sin\theta}.$$

（如果改为由向下的铅垂线量度 θ，同一曲线写成 $r(1-\cos\theta)=2d$。）由于 $r=2d-y$，线上每一点与 O 的距离都等于它与水平线 $y=2d$ 的距离。所以这条线是一条抛物线（parabola），焦点（focus）在环上，准线（directrix）在环上方高度 $2d$ 处；以直角坐标表示为 $x^2=4d(d-y)$，顶点为 $(0,d)$。



图中珠子与环处于同一水平；张力 $T=mg$、重力 mg 和法向反作用力（normal reaction）R 互相平衡，因为抛物线在该处的斜率恰好是 -1。

珠子的速率

现在珠子以速率 u 沿线移动。绳保持拉紧，长度不变，所以悬挂的质点仍位于环下方距离 $L-r$ 处。

想一想 悬挂的质点移动得多快?

它在环下方的深度是 $L-r$，所以它的速度是垂直的，速率为 $|\dot r|$。注意 $\dot r$ 只是珠子速度的径向部分，而不是它的整个速率 u。

一旦开始运动，张力便不再是 mg，但它对系统不做净功：绳不可伸长而环光滑，所以张力对珠子所做的功与它对悬挂质点所做的功互相抵消。线的反作用力垂直于珠子的运动，不做功。所以能量守恒：

$$\tfrac{1}{2}mu^2+\tfrac{1}{2}m\dot r^2+V=\text{常数}.$$

但由第一部分，在线上 $V = mg \cdot 2d - mgL$ 是常数。因此

$$u^2 + \dot{r}^2 = \text{常数}. \qquad (*)$$

接着把 $\dot{r}$ 与 u 联系起来。对 $r = 2d/(1+\sin\theta)$ 求导，

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{2d\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2} = -\frac{r\cos\theta}{1+\sin\theta}, \qquad \text{所以} \qquad \dot{r}^2 = r^2\dot{\theta}^2\,\frac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2} = r^2\dot{\theta}^2\,\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta},$$

这里用了 $\cos^2\theta = (1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$。由曲线方程，$1+\sin\theta = 2d/r$ 及 $1-\sin\theta = 2-2d/r = 2(r-d)/r$，所以

$$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta} = \frac{r-d}{d}, \qquad \text{得} \qquad \dot{r}^2 = \frac{r-d}{d}\,r^2\dot{\theta}^2.$$

在极坐标中，速率满足 $u^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$，所以

$$u^2 = r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{r-d}{d}+1\right) = \frac{r}{d}\,r^2\dot{\theta}^2, \qquad \text{因此} \qquad \dot{r}^2 = \frac{r-d}{r}\,u^2.$$

想一想 当 $r = d$ 时，$\dot{r}$ 是多少?

当 $r = d$ 时，珠子位于顶点，$\theta = \frac{\pi}{2}$，此处 r 取最小值，且 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta = 0$。所以该处 $\dot{r} = 0$（公式 $\dot{r}^2 = \frac{r-d}{r}u^2$ 也这样说），悬挂的质点瞬间静止。因此 $(*)$ 中的常数是 v^2：

$$u^2 + \frac{r-d}{r}\,u^2 = v^2 \quad\Longrightarrow\quad u^2\,\frac{2r-d}{r} = v^2 \quad\Longrightarrow\quad u = \left(\frac{r}{2r-d}\right)^{\frac{1}{2}} v,$$

由于 u 和 v 是速率，取正根。这就是所求的结果。

验算

- 当 $r = d$ 时，公式给出 $u = v$，理应如此。
- 当 $r \to \infty$ 时，$u \to v/\sqrt{2}$。在很远处，抛物线的切线几乎正好沿着半径方向，所以 $\dot{r} \approx u$，而动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 由珠子与质点平均分享。
- 在环的水平上的平衡：点 $(2d, 0)$ 在曲线上，该处张力 mg（水平）与重力 mg（垂直）合成一个与水平成 45° 的力，垂直于抛物线在该处斜率为 -1 的切线。
- 数值上，取 $d = 1.3$ 及 $v = 2$，我们由顶点出发，沿抛物线对珠子与质点系统的运动方程进行数值积分。在 $r = 2.8905$ 处，珠子的速率是 1.606309，与 $\sqrt{r/(2r-d)}\,v$ 相差约 10^{-8}。我们亦在线上 1000 个随机点验证了静止珠子所受的切向力为零。

常见错误

- 忘记悬挂质点的动能，结果对所有 r 都得出 $u = v$。势能是常数，但动能是由两者分享的。
- 把质点的速率当作 u 而不是 $|\dot{r}|$。只有珠子运动的径向部分才会把绳拉过环。
- 由另一条线量度 θ，却照搬 $r(1+\sin\theta) = 2d$。任何正确的极坐标形式都可以，但要说明 θ 是由哪条线量度的。

STEP 之外

系统在势能取驻值之处处于平衡，这个想法就是*虚功原理*（principle of virtual work），它引向拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）。在拉格朗日力学中，动能以一个广义坐标（generalised coordinate）（这里是 θ）表示，运动方程由此直接得出，完全不必求张力。由于 V 在这条线上是常数，珠子和质点的运动就好像完全没有受力一样，而我们的关系式不过是动能 $\frac{1}{2}m\,r^2(2r-d)\dot{\theta}^2/d$ 守恒。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）以这种精神讲解能量方法和受约束的运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。