详细解答

STEP II 1987，第 11 题

力学 · 摩擦力与力矩

> **STEP II 1987，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q11

关键思路

支点的作用力是未知的，我们也不需要求它，所以我们对支点 O 取力矩（moment），因为该力对 O 没有力矩。杆是处于三维空间中的，但圆环所在的平面给出两个自然的方向：垂直于平面的方向（法向反作用力（normal reaction）沿此方向作用）和平面内的方向（摩擦力（friction）在此方向作用）。把重力也按同样方式分解，一条力矩方程给出法向反作用力，另一条给出摩擦力。两者之比就是 μ。

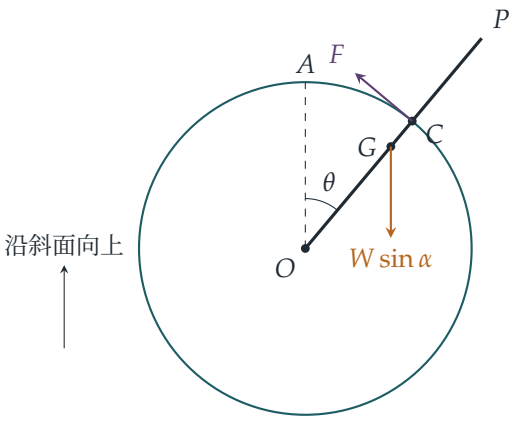
解答

模型。 杆 OP 是一条重量为 W 的均匀杆，其质心（centre of mass）G 位于中点，所以 $OG = \frac{1}{2}b$。杆以光滑支点（pivot）固定于圆环的圆心 O。杆横跨圆环，搁在圆周上的一点 C，所以 $OC = a$。由于 O 和 C 都在圆环所在的平面上，杆也位于该平面内。设 A 为圆环的最高点，于是 OA 沿最大斜率线（line of greatest slope）直指向上，并设 $\angle AOC = \theta$。

作用力。 作用于杆上的力有：

- 作用于 G 的重力 W；
- 光滑支点 O 处的作用力，此力未知，但对 O 没有力矩；
- C 处的接触力。杆与圆环的金属线在 C 相交。杆沿半径方向，金属线沿切线方向，两者都在平面内，所以它们的公共法线垂直于平面。因此法向反作用力 R 垂直于圆环所在的平面。摩擦力 F 位于平面内。杆唯一可能的运动是绕 O 转动，这会令 C 沿圆环的切线移动。所以摩擦力沿该切线作用，与杆垂直。

把重力分解为垂直于平面（指向平面内）的分量 $W\cos\alpha$，以及在平面内沿最大斜率线向下的分量 $W\sin\alpha$。下图是垂直俯视该平面所见的情况，A 在最上方。R 在 C 处指出纸面。



对 O 取力矩。 由于支点光滑，其余各力对经过 O 的每一条轴的总力矩都是零。其中两条轴能给出有用的方程。

*在平面内、经过 O 并垂直于杆的轴。*只有垂直于平面的力对这条轴有力矩，即距离为 $\frac{1}{2}b$ 的 $W\cos\alpha$ 和距离为 a 的 R。平面内的力 F 和 $W\sin\alpha$ 要么与这条轴相交，要么与它平行，所以对它没有力矩。因此

$$R\,a = W\cos\alpha\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{所以} \qquad R = \frac{Wb\cos\alpha}{2a}.$$

*垂直于平面、经过 O 的轴。*现在只有平面内的力才起作用。杆与沿斜面向上的方向成 θ 角，所以 $W\sin\alpha$ 垂直于杆的分量是 $W\sin\alpha\sin\theta$，作用于距离 $\frac{1}{2}b$ 处。摩擦力本身已垂直于杆，作用于距离 a 处。因此

$$F\,a = W\sin\alpha\sin\theta\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{所以} \qquad F = \frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a}.$$

重力在平面内的分量倾向令杆摆离 A，向圆环底部摆下去，而摩擦力则阻止这个运动。

想一想 摩擦力会不会也有沿杆方向的分量?

沿杆方向的力经过 O,所以对 O 没有力矩。它既不能促进也不能阻碍转动,而支点可以提供沿杆方向的任何力。唯一可能的运动是绕 O 转动, 所以对极限平衡（limiting equilibrium）而言，有关的摩擦力是沿切线方向的分量，也就是 F。我们把摩擦力视为完全沿切线作用。

极限平衡。 在极限平衡时 $F = \mu R$:

$$\frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a} = \mu\,\frac{Wb\cos\alpha}{2a} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mu = \tan\alpha\,\sin\theta}$$

（我们取 $0 \le \theta \le \pi$）。只要 $\tan\alpha \sin\theta \le \mu$，杆便能在角 θ 处保持平衡。留意 a、b 和 W 全都消去了。

验算

- 若 $\theta = 0$ 或 $\theta = \pi$，杆沿最大斜率线放置。此时重力在平面内的分量正好沿杆方向拉，不需要摩擦力：$\mu = 0$。当 $\alpha = 0$ 时亦然，因为圆环水平时重力在平面内没有分量。
- 当 $\theta = \frac{1}{2}\pi$，即杆处于水平时，所需的摩擦力最大。此时 $\mu = \tan\alpha$，与倾角为 α 的斜面上的木块情况吻合。
- 我们做了一次数值验算：对 α, θ, a, b, W 随机取 2000 组值，把各力写成三维向量（vector），解对 O 的向量力矩方程求 R 和 F，发现 F/R 与 $\tan\alpha \sin\theta$ 的差距在 4×10^{-15} 以内。例如 $\alpha = 30°$、$\theta = 60°$ 给出 $\mu = \frac{1}{2}$。

常见错误

- 以为 C 处的法向反作用力沿半径方向，就像杆靠在铅垂平面中的圆环内侧那样。这里杆是横跨在金属线上的，所以法线垂直于圆环所在的平面。
- 用分解力的方法而不取力矩。这样会引入支点作用力的三个未知分量，而题目并不需要它们。

STEP 之外

这里我们对经过 O 的两条互相垂直的轴取力矩。这是单一向量方程 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ 的捷径，该方程表示对 O 的总转矩（torque）为零。把转矩视为向量，以及刚体（rigid body）在三维空间中的平衡条件，都是大学一年级力学的标准内容，并会进一步引向刚体绕固定点的转动。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）正是以这种方式，把转矩和角动量（angular momentum）作为向量来发展。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。