详细解答

STEP II 1987，第 10 题

纯数学 · 群公理

> **STEP II 1987，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q10

关键思路

一切都发生在下标（subscripts）之中，所以把每个运算转化为下标 $1,2,\ldots,N$ 上的普通算术：第一个运算是“取最大值”，第二个运算是“取两者之差的绝对值，再加一”。然后逐一检验四条公理（axioms）：封闭性（closure）、结合律（associativity）、单位元（identity）、逆元（inverses）。要说明某条公理不成立，只需一个具体的反例（counterexample）；要说明某条公理成立，则需要一般性的论证。

解答

全文中，以 $j\circ k$ 表示 $a_j\circ a_k$ 的下标，$*$ 亦同理。两个元素相等，当且仅当它们的下标相等。

运算 $\circ$

这里 $a_j\circ a_k=a_{\max(j,k)}$。

封闭性成立。若 $1\le j,k\le N$，则 $\max(j,k)$ 是 j 和 k 其中之一，所以它属于 $\{1,\ldots,N\}$，因此 $a_j\circ a_k\in S$。

结合律成立。对任意 j,k,l，

$$(a_j\circ a_k)\circ a_l=a_{\max(\max(j,k),l)}=a_{\max(j,k,l)}=a_{\max(j,\max(k,l))}=a_j\circ(a_k\circ a_l),$$

因为两种加括号的方式都得出三个下标中最大的一个。

单位元存在：它就是 a_1。每个下标都至少是 1，所以 $\max(1,k)=\max(k,1)=k$，因此对每个 k 都有 $a_1\circ a_k=a_k\circ a_1=a_k$。

逆元不成立。a_j 的逆元应是某个 a_k，使得 $a_j\circ a_k=a_1$，即 $\max(j,k)=1$。但 $\max(j,k)\ge j$，

所以当 $j \geq 2$ 时这是不可能的。例如，对每个 k，$a_2 \circ a_k$ 都是 a_2 或排在其后的元素，永远不会是 a_1。只有 a_1 有逆元（就是它自己）。

所以 S 在 $\circ$ 下满足封闭性、结合律和单位元，但不满足逆元公理，因此不是群（group）。

想一想 会不会有其他元素也是单位元，以致逆元的论证需要重做?

不会：单位元是唯一的。若 e 和 e' 都是单位元，则 $e = e \circ e' = e'$。所以“$a_j \circ a_k$ 等于单位元”中的单位元只可能是 a_1，上面的论证是完整的。

运算 $*$

这里 $a_j * a_k = a_{|j-k|+1}$。当 $N = 4$ 时，下标的运算表为

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	2	3
3	3	2	1	2
4	4	3	2	1

表中可见的规律对每个 N 都成立。

封闭性成立。若 $1 \leq j, k \leq N$，则 $0 \leq |j-k| \leq N-1$，所以 $1 \leq |j-k|+1 \leq N$，因此 $a_j * a_k \in S$。

单位元存在：它就是 a_1。由于 $k \geq 1$, $|1-k| = k-1$, 所以 $a_1 * a_k = a_k$; 同样地 $a_k * a_1 = a_k$（因为 $|j-k| = |k-j|$，这个运算是可交换的（commutative））。

逆元成立。$a_j * a_j = a_{0+1} = a_1$，即单位元，所以每个元素都是自己的逆元。（这就是表中对角线上的一列 1。）

结合律不成立。取 a_2, a_2, a_3（这需要 $N \geq 3$）：

$$(a_2 * a_2) * a_3 = a_1 * a_3 = a_3,$$
$$a_2 * (a_2 * a_3) = a_2 * a_{|2-3|+1} = a_2 * a_2 = a_1.$$

两者不同，所以 $*$ 不满足结合律。

所以 S 在 $*$ 下满足封闭性、单位元和逆元，但不满足结合律，因此同样不是群。

想一想 哪里用到了 $N > 2$?

只在结合律的反例中用到，因为它用了 a_3。当 $N = 2$ 时，运算表就是 2 阶群的运算表（a_1 为单位元，$a_2 * a_2 = a_1$），而 $*$ 是满足结合律的；至于 $\circ$，逆元的论证只需要 a_2，所以 $\circ$ 在 $N = 2$ 时同样不成群。

验算

用穷举法（brute force）检查小的情况：对 2 至 9 的每个 N，我们列出所有三元组来检验结合律，并直接搜索单位元和逆元。对于 $\circ$：封闭、满足结合律、单位元为 a_1，且只有 a_1 可逆。对于 $*$：封闭、单位元为 a_1、每个元素都是自己的逆元，而结合律对每个 $N \geq 3$ 都不成立（包括在 (a_2, a_2, a_3) 处），但在 $N = 2$ 时成立。你可以用一个 3×3 的运算表，一分钟内亲手完成 $N = 3$ 的情况。

常见错误

- 以为“取最大值”不像乘法，便断言 $\circ$ 没有单位元。应检查最小的元素：a_1 正是单位元。
- 尝试一般地证明 $*$ 满足结合律，或者只检验含有 a_1 的三元组（这些三元组必然满足结合律，因为 a_1 是单位元）。真正需要的只是一个具体的反例。
- 忘记检验封闭性。封闭性很容易被想当然，但这里它需要用到上界 $|j - k| \leq N - 1$。

STEP 之外

一个带有满足结合律的运算和单位元的集合，例如 S 在 $\circ$ 下，称为么半群（monoid）；全序集（totally ordered set）上的“取最大值”是一个标准例子，它同时也是一个半格（semilattice）。一个满足封闭性、单位元和逆元但不满足结合律的集合，例如 S 在 $*$ 下，说明结合律是一条真正独立的公理：它不能从其余三条推导出来。若想了解群的各条公理如何互相配合，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。