详细解答

STEP II 1987，第 1 题

纯数学 · 代数恒等式

> **STEP II 1987，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q1

关键思路

不要急于代入消去其中一个字母，而应该把右边展开（expand）。平方项 a^2、b^2、c^2 在两边都出现，可以互相抵消，剩下的是 x 乘以一个线性表达式（linear expression），而这个表达式恰好是已知条件的某个倍数。一旦看清数字 7 和 11 从何而来，一般结果便水到渠成。

解答

先一次过做一般情况的展开会比较方便。对任意数 p、q、r，

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2=(p^2+q^2+r^2)x^2-2x(pa+qb+rc)+a^2+b^2+c^2,$$

所以

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[(p^2+q^2+r^2)x-2(pa+qb+rc)]. \qquad (*)$$

第 (i) 部分

这里 $(p,q,r)=(1,2,3)$，所以 $p^2+q^2+r^2=14$，而 $(*)$ 变成

$$(x-a)^2+(2x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[14x-2(a+2b+3c)].$$

若 $a+2b+3c=7x$，方括号内便是 $14x-14x=0$。因此两边相等，得证。

第 (ii) 部分

现在 $(p,q,r)=(2,3,3)$，所以 $p^2+q^2+r^2=4+9+9=22$，而

$$(2x-a)^2+(3x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[22x-2(2a+3b+3c)].$$

若 $2a+3b+3c=11x$，方括号内便是 $22x-22x=0$，这就证明了 (ii)。

> **想一想** 为甚么 (i) 中是 7，(ii) 中是 11?

它们都是 $p^2+q^2+r^2$ 的一半：$7=\frac{1}{2}(1+4+9)$，$11=\frac{1}{2}(4+9+9)$。这就告诉我们一般的命题应该是甚么。

一般结果

恒等式（identity）$(*)$ 直接证明了以下结果。

对任意实数 p,q,r,a,b,c,x，若

$$2(pa+qb+rc)=(p^2+q^2+r^2)\,x,$$

则

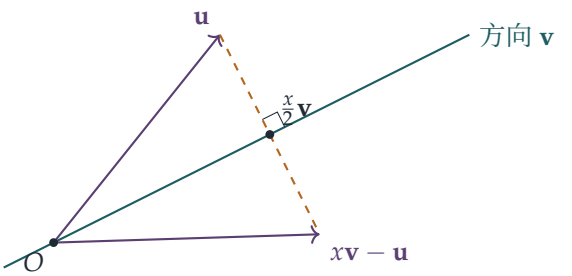
$$a^2+b^2+c^2=(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2.$$

第 (i) 部分是 $(p,q,r)=(1,2,3)$ 的情况，第 (ii) 部分是 $(p,q,r)=(2,3,3)$ 的情况。

同样的展开对任意多个变量都适用。若 $2\sum_{i=1}^{n}p_ia_i=(\sum_{i=1}^{n}p_i^2)x$，则 $\sum a_i^2=\sum(p_ix-a_i)^2$。由 $(*)$ 我们还得到一个逆命题（converse）：若 $x\neq 0$ 且恒等式成立，则条件必定成立。

几何上的意义

记 $\mathbf{u}=(a,b,c)$ 及 $\mathbf{v}=(p,q,r)$。条件可写成 $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{x}{2}|\mathbf{v}|^2$，意思是 $\frac{x}{2}\mathbf{v}$ 是从 $\mathbf{u}$ 到经过 O、方向为 $\mathbf{v}$ 的直线的垂足（foot of the perpendicular）。于是向量 $x\mathbf{v}-\mathbf{u}=2\cdot\frac{x}{2}\mathbf{v}-\mathbf{u}$ 就是 $\mathbf{u}$ 关于该直线的反射（reflection）。反射保持长度不变，所以 $|x\mathbf{v}-\mathbf{u}|=|\mathbf{u}|$，而这正是那个恒等式。



验算

以 $x=1$、$a=b=0$、$c=\frac{7}{3}$ 试验 (i)。左边是 $\frac{49}{9}$，右边是 $1+4+\left(\frac{2}{3}\right)^2=5+\frac{4}{9}=\frac{49}{9}$。我们还用精确的有理数运算测试了两部分及一般结果，每项各测试 2000 个随机例子（一般情况最多六个变量），并确认了当 $x\neq 0$ 而条件不成立时，恒等式必定不成立。

常见错误

- 一开始就代入 $c=\frac{1}{3}(7x-a-2b)$。这样做行得通，但代数运算很繁琐，而且掩盖了问题的结构。
- 把一般结果写成“$pa+qb+rc=kx$”，却没有交代 k 与 p,q,r 的关系。恒等式要求 $k=\frac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)$。

STEP 之外

这个几何图像正是线性代数（linear algebra）的起点。映射 $\mathbf{u}\mapsto 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v}-\mathbf{u}$ 是一个反射，属于正交线性映射（orthogonal linear map），而正交映射恰好就是保持长度不变的线性映射。像这样的投影（projection）和反射，是最小二乘法（least squares）以及数值计算中所用的 Householder 变换（Householder transformations）的基础。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）以同样的几何风格发展这些概念。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。