详细解答

STEP I 1987，第 9 题

纯数学 · 重心坐标

> **STEP I 1987，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q9

关键思路

从 A 向 B 移动，就是加上向量（vector）$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ 的某个分数倍。做一次，得到的是线段（segment）上的点；做两次，先沿 AB 走，再从该点向 C 走，就能扫遍整个三角形。至于作图部分，窍门是把每种情况改写成我们已经理解的形式：要么是三角形情况的翻转，要么是点 A 加上两条边向量的倍数。

解答

AB 上的点

线段 AB 上的点 P，可以从 A 出发，沿 $\overrightarrow{AB}$ 走全程的 t 倍到达，其中 $0 \le t \le 1$（$t = 0$ 给出 A，$t = 1$ 给出 B）。因此

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}.$$

设 $\rho = 1 - t$ 及 $\sigma = t$。由于 $0 \le t \le 1$，所以 $\rho \ge 0$ 及 $\sigma \ge 0$，而且 $\rho + \sigma = 1$。这正是所求的形式。反过来，取 $t = \sigma$，每一对这样的 ρ, σ 都给出线段上的一点。

PC 上的点，以及三角形内的点

用完全相同的方法，线段 PC 上的点 Q 的位置向量（position vector）为

$$\mathbf{q} = (1 - s)\mathbf{p} + s\,\mathbf{c}, \qquad 0 \le s \le 1.$$

代入 $\mathbf{p} = \rho\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$，得

$$\mathbf{q} = (1 - s)\rho\,\mathbf{a} + (1 - s)\sigma\,\mathbf{b} + s\,\mathbf{c}.$$

设 $\lambda = (1-s)\rho$、$\mu = (1-s)\sigma$ 及 $\nu = s$。每一个都是非负（non-negative）数的乘积，所以 $\lambda, \mu, \nu \geq 0$。此外

$$\lambda + \mu + \nu = (1-s)(\rho+\sigma) + s = (1-s) + s = 1.$$

想一想 为甚么三角形内的每一点都位于某条线段 PC 上?

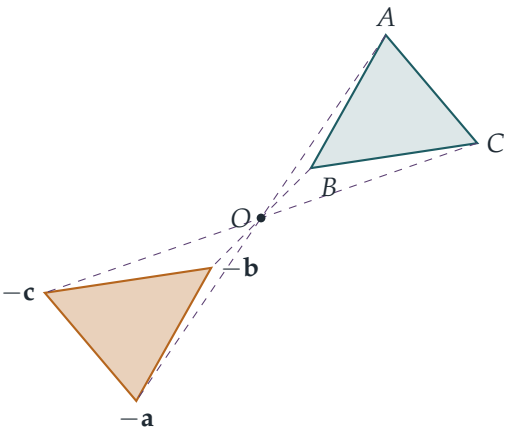
取三角形内（或其边界上）的一点 X。若 $X = C$，则无需证明：取 $s = 1$ 即可。否则，从 C 经过 X 画一条直线，并延伸越过 X。由于 X 位于角 ACB 之内，这条直线保持在 CA 与 CB 之间，因此必定与对边 AB 相交，设交点为 P。由于 X 在三角形内，它位于 C 与 P 之间，所以 X 在线段 PC 上。根据上面的推导，$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$，其中 $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ 且 $\lambda + \mu + \nu = 1$，命题得证。

第 (i) 部分

设 $\lambda = -\lambda'$、$\mu = -\mu'$ 及 $\nu = -\nu'$。条件变为 $\lambda', \mu', \nu' \geq 0$ 及 $\lambda' + \mu' + \nu' = 1$，而该点为

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = -\left(\lambda'\mathbf{a} + \mu'\mathbf{b} + \nu'\mathbf{c}\right).$$

根据刚才所证，括号内的式子遍历三角形 ABC 的每一点（再加上第一部分的逆命题，每一个这样的组合都在三角形内）。因此所求区域是所有点 $-\mathbf{x}$ 的集合，其中 X 在三角形 ABC 内。换言之，它是以 $-\mathbf{a}$、$-\mathbf{b}$、$-\mathbf{c}$ 为顶点的三角形连同其内部：即三角形 ABC 绕原点 O 旋转半周（half-turn）后的像。



琥珀色阴影三角形就是 (i) 的答案。它的每个顶点都是 ABC 的一个顶点经 O 的点对称像，如虚线所示。

第 (ii) 部分

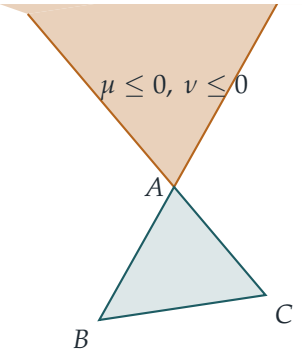
现在 $\lambda = 1 - \mu - \nu$，所以

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

我们从 A 出发，加上 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{AC}$ 的倍数。设 $\mu = -m$ 及 $\nu = -n$，其中 $m, n \geq 0$，则该点为

$$\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c}), \qquad m \geq 0,\ n \geq 0.$$

向量 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 指向 BA 越过 A 的延长方向，而 $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ 指向 CA 越过 A 的延长方向。两个不平行向量的非负组合恰好填满它们之间的角（由于 $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ 与 $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ 不平行，平面上每一点都可唯一地写成 $\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c})$，即 m, n 恰有一对）。因此所求区域是以 A 为顶点、以 BA 和 CA 越过 A 的延长线为界的无限楔形区域（wedge），边界射线包括在内。它是角 BAC 的对顶角（vertically opposite angle）。注意题目没有限制 λ，但在这里它自动至少为 1。



琥珀色楔形区域（无限延伸）就是 (ii) 的答案。它的边是边 BA 和 CA 经 A 延长所得。图中青色三角形 ABC 仅供参照。

验算

- 顶点：在 (ii) 中，$(\lambda, \mu, \nu) = (1, 0, 0)$ 给出 A 本身，即楔形的尖端；$(2, -1, 0)$ 给出 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$，即 B 关于 A 的对称点，它位于其中一条边上。在 (i) 中，$(-1, 0, 0)$ 给出 $-\mathbf{a}$，即对称后三角形的一个顶点。
- 重心：在 (i) 中，$\lambda = \mu = \nu = -\frac{1}{3}$ 给出 ABC 重心（centroid）的负值，这正是对称后三角形的重心，与预期相符。
- 数值方面，我们用电脑随机取了 20,000 个三角形，以及满足各组条件的随机系数。结果确认：(i) 的每一点都位于三角形 $(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, -\mathbf{c})$ 内；(ii) 的每一点从 A 出发沿 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} - \mathbf{c}$ 的坐标都是非负的；而 ABC 的每一点都可分解为某条线段 PC 上的点。

常见错误

- 在 (i) 中，在 ABC 附近画出区域。系数之和是 -1 而不是 1，所以该区域是 ABC 绕原点旋转半周的结果，并且取决于 O 的位置。
- 在 (ii) 中，只画出一个三角形。μ 和 ν 没有下界，所以该区域是无界的。
- 把与 BAC 相邻的角涂上阴影（例如 AB 与 CA 延长线之间的角）。那需要 μ, ν 其中之一为正数。

STEP 之外

满足 $\lambda + \mu + \nu = 1$ 的数组 (λ, μ, ν) 称为一点相对于该三角形的重心坐标（barycentric coordinates）。当总和为 1 时，该点与原点的位置无关：把每个位置向量都平移 $\mathbf{d}$，$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$ 也会平移 $(\lambda + \mu + \nu)\mathbf{d} = \mathbf{d}$。这就是为甚么 (ii) 的答案是一个真正的几何区域，而 (i) 则取决于 O。三角形本身是 A、B、C 的凸包（convex hull），这个概念是线性规划（linear programming）和凸优化（convex optimisation）的核心。重心坐标的正负号把平面分成七个区域，(ii) 是其中之一。若想从大学一年级的角度认识这些仿射（affine）概念，可参阅 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。