详细解答

STEP I 1987，第 8 题

纯数学 · 代换积分法

STEP I 1987，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s1-q8

关键思路

代换（substitution）要成为合法的变量转换，前提是当旧变量走过某个区间时，新变量也要平滑地、单向地走过一个区间。这里 $t = 1/x$ 在 $x = 0$ 处趋于无穷，而 $x = 0$ 正好位于 $[-1, 1]$ 的中间，所以“新的上下限”-1 和 1 描述的是一组完全不同的 t 值。只要看一看两个被积函数（integrand）的正负号，就能确认出了问题。

解答

代换为何失效

形式上，设 $x = 1/t$，则 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$，而且

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2} = \frac{t^4}{(1+t^2)^2}, \qquad \text{所以} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

而 $x = \pm 1$ 对应 $t = \pm 1$。这就是“证明”两个积分相等的做法。但这不可能是对的：第一个被积函数处处为正，所以第一个积分是正数；而第二个被积函数处处 ≤ 0，所以第二个积分是负数。

? **想一想** 当 x 由 -1 走到 1 时，$t = 1/x$ 实际上取哪些值?

当 x 由 -1 增加到 0^- 时，t 由 -1 减少到 $-\infty$；在 $x = 0$ 处根本没有对应的 t；而当 x 由 0^+ 走到 1 时，t 由 $+\infty$ 下降到 1。所以 x 的区间 $[-1, 1]$ 对应的是 $t \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$，即 $[-1, 1]$ 的外面，而不是 $[-1, 1]$ 本身。代换法则要求 $x = \phi(t)$，其中 ϕ 在新上下限之间的整个 t 区间上可导，但 $\phi(t) = 1/t$ 在 $t = 0 \in [-1, 1]$ 处连定义都没有。$(-1, 1)$ 内的 t 值对应 $|x| > 1$，那些值根本在原来的范围以外。

正确地使用这个代换，即在两半上分别进行，例如可得

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_\infty^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

这是一个正确的命题（下面会加以验证），但它对于 t 在 $[-1,1]$ 上的积分毫无说明。

第一个积分

设 $x = \tan\theta$，则 $\mathrm{d}x = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ 及 $1+x^2 = \sec^2\theta$；这个代换没有问题，因为 tan 在 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ 上平滑而且递增。于是

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta = \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)},\end{aligned}$$

这里用了 $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\tan\theta\cos^2\theta$。因此

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \left[\tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)}\right]_{-1}^1 = 2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}.$$

第二个积分

把分子写成 $-t^2 = 1-(1+t^2)$：

$$\frac{-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2}.$$

由上一部分，第一项在 $[-1,1]$ 上的积分是 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$，而 $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$。所以

$$\int_{-1}^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}},$$

这是负数（≈ -0.285），正如被积函数的正负号所要求的；而第一个积分约为 1.285。

验算

- 用辛普森法则（Simpson's rule）计算两个积分，得 1.2853981… 和 −0.2853981…，与 $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ 吻合。
- 两个答案之和是 1。这是有原因的：$\frac{1}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$，它正是 $\frac{x}{1+x^2}$ 的导数（derivative），而 $\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_{-1}^1 = 1$。
- 正确的半区间命题也验证无误：$\int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$。

常见错误

- 只说“$1/t$ 在 $t=0$ 处无定义”，却没有解释 x 的范围 $[-1,1]$ 对应的是 $|t|\geq 1$：真正的重点是两个积分涵盖的是不同的取值集合。
- 把 $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 的正负号弄错，以致掩盖了那个露出破绽的正负号矛盾。
- 积分 $\cos^2\theta$ 时漏掉 $\frac{1}{4}\sin 2\theta$ 一项。

STEP 之外

代换法则 $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在大学第一门数学分析（analysis）课程中，会由链式法则（chain rule）和微积分基本定理（Fundamental Theorem of Calculus）证明，而证明过程清楚显示所需的条件：ϕ 必须在整个 $[a,b]$ 上连续可微（continuously differentiable）。这里它在一点上失效，而单单这一点就足以令结果崩溃。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）细致地建立了黎曼积分（Riemann integral）及这些定理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。