详细解答

STEP I 1987，第 7 题

纯数学 · 三角级数

STEP I 1987，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s1-q7

关键思路

两个级数（series）都是正弦之和，而且角度以相等的步长递增。把 $\sin((2k+1)\theta)$ 这类项乘以 $2\sin\theta$ 或 $2\cos\theta$，再利用积化和差公式（product-to-sum formula），便可把它化为相邻两项的*差*或*和*，于是整个级数便会裂项相消（telescopes）。唯一要决定的是用哪个因子：$2\sin\theta$ 适用于普通的和，$2\cos\theta$ 则适用于交错（alternating）的和。

解答

准备工作

设 $\theta = \dfrac{2\pi}{23}$。各角为 $2\pi/23,\ 6\pi/23,\ 10\pi/23, \ldots, 42\pi/23$，每次增加 $4\pi/23 = 2\theta$，所以它们是

$$(2k+1)\theta \qquad \text{其中} k = 0, 1, \ldots, 10,$$

因为 $21\theta = 42\pi/23$。这样共有 11 项，而在交错级数中，第 k 项的符号是 $(-1)^k$（最后一项 $k = 10$ 的符号是 $+$，正合题意）。因此我们要求

$$S_1 = \sum_{k=0}^{10} \sin((2k+1)\theta), \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \sin((2k+1)\theta).$$

我们会用到 $22\theta = \dfrac{44\pi}{23} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{23}$，因此

$$\cos 22\theta = \cos\theta, \qquad \sin 22\theta = -\sin\theta.$$

第一个级数

由积化和差公式 $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$，

$$2\sin\theta\,\sin((2k+1)\theta)=\cos(2k\theta)-\cos((2k+2)\theta).$$

对 $k=0,\ldots,10$ 求和，每个 $1\le k\le 10$ 的 $\cos(2k\theta)$ 都以正负号各出现一次而互相抵消，剩下

$$2\sin\theta\,S_1=\cos 0-\cos 22\theta=1-\cos\theta.$$

由于 $0<\theta<\pi$，$\sin\theta\neq 0$，所以可以相除：

$$S_1=\frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{2\sin^2(\theta/2)}{4\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}=\tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2},$$

这里用了 $1-\cos\theta=2\sin^2(\theta/2)$ 和 $\sin\theta=2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$，并约去 $\sin(\theta/2)\neq 0$。由于 $\theta/2=\pi/23$，

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23}+\sin\tfrac{6\pi}{23}+\cdots+\sin\tfrac{42\pi}{23}=\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\pi}{23}.}$$

想一想 为甚么处理交错级数时要乘以 $2\cos\theta$，而不是再乘以 $2\sin\theta$?

若乘以 $2\sin\theta$，得到的是差 $\cos(2k\theta)-\cos((2k+2)\theta)$，而交错的符号会令相邻的项相加而非抵消。若乘以 $2\cos\theta$，得到的是和 $\sin((2k+2)\theta)+\sin(2k\theta)$，这时正是交错的符号带来抵消。

第二个级数

由 $2\cos A\sin B=\sin(B+A)+\sin(B-A)$，

$$2\cos\theta\,\sin((2k+1)\theta)=\sin((2k+2)\theta)+\sin(2k\theta).$$

乘以 $(-1)^k$ 再求和。对于 $1\le k\le 10$，$\sin(2k\theta)$ 一次来自第 $k-1$ 项，符号为 $(-1)^{k-1}$，另一次来自第 k 项，符号为 $(-1)^k$，所以互相抵消。剩下的是来自 $k=0$ 的 $\sin 0$ 和来自 $k=10$ 的 $(-1)^{10}\sin 22\theta$：

$$2\cos\theta\,S_2=\sin 22\theta=-\sin\theta.$$

由于 $0<\theta<\pi/2$，$\cos\theta\neq 0$，所以

$$S_2=-\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}=-\tfrac{1}{2}\tan\theta,$$

即

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23}-\sin\tfrac{6\pi}{23}+\cdots-\sin\tfrac{38\pi}{23}+\sin\tfrac{42\pi}{23}=-\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{2\pi}{23}.}$$

如果你喜欢看起来是正的形式，由于 $\tan(\pi-x)=-\tan x$，这也等于 $\frac{1}{2}\tan\frac{21\pi}{23}$。

验算

- 以数值计算，$\frac{1}{2}\tan(\pi/23) \approx 0.068723$，而 $-\frac{1}{2}\tan(2\pi/23) \approx -0.140093$；直接把十一项相加，得到的值在 15 位有效数字（significant figures）内完全相同。
- 第二个答案是负数，这是合理的：部分和（partial sums）在约 ± 0.5 之间摆动，而最后加上的一项 $\sin(42\pi/23) \approx -0.27$ 本身就是负数。
- 同样的方法可得出一般公式 $\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)\theta) = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$ 和 $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \sin((2k+1)\theta) = (-1)^{n-1}\dfrac{\sin 2n\theta}{2\cos\theta}$；试取 $n = 1$，两者都化为 $\sin\theta$。

常见错误

- 数错项数：角度每次增加 $4\pi/23$，而不是 $2\pi/23$，所以共有 11 项，而不是 21 项。
- 以为两个答案都是正数。大于 π 的角的正弦是负的，而负号正是来自 $\sin(44\pi/23) = -\sin(2\pi/23)$。

STEP 之外

这些和是几何级数（geometric series）的虚部（imaginary part）：$S_1 = \operatorname{Im}\sum e^{i(2k+1)\theta}$，而 S_2 也一样，只是公比为 $-e^{2i\theta}$，这为两个答案提供了第二条途径。这类和，例如狄利克雷核（Dirichlet kernel），是傅里叶分析（Fourier analysis）的起点；在傅里叶分析中，函数由正弦和余弦组合而成。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）借助旋转向量的图像，说明这类和为何有这样的表现。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。