详细解答

STEP I 1987，第 6 题

纯数学 · 面积与反函数

STEP I 1987，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s1-q6

关键思路

$\mathrm{F}(s)$ 是曲线下方、介乎曲线与 x 轴之间的面积；$\mathrm{G}(t)$ 则是曲线左方、介乎曲线与 y 轴之间的面积。把这两个区域画在同一幅图上，它们合起来覆盖以 $(0,0)$ 和 (s,t) 为顶点的长方形，而且除非顶点 (s,t) 刚好落在曲线上，否则还会有多出来的部分。在第二部分，我们选取 s 使这种情况出现，于是较难的积分 $\int \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y$ 便可以从容易的积分 $\int \sin x \,\mathrm{d}x$ 直接得出。

解答

不等式 $(*)$

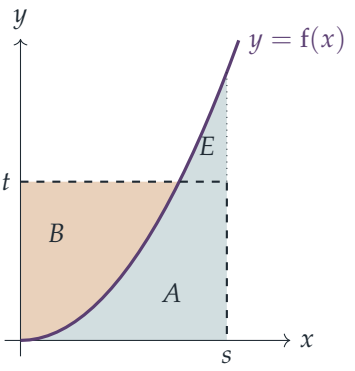
首先看看 f 的一个性质。它是连续（continuous）的，而且每个值最多只取一次，所以它是严格单调（strictly monotonic）的（根据介值定理（intermediate value theorem），一个先上升后下降的连续函数必定会把某个值取两次）。由于 $\mathrm{f}(0) = 0$ 且 $\mathrm{f}(x) \geq 0$，它必定是严格递增（strictly increasing）的。因此 g 亦是递增的，并且对于 $0 \leq x \leq a$、$0 \leq y \leq \mathrm{f}(a)$，

$$y \leq \mathrm{f}(x) \iff \mathrm{g}(y) \leq x.$$

定义两个区域：

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq s,\ 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}, \qquad \text{面积}\mathrm{F}(s),$$
$$B = \{(x,y) : 0 \leq y \leq t,\ 0 \leq x \leq \mathrm{g}(y)\}, \qquad \text{面积}\mathrm{G}(t),$$

并设 R 为长方形 $0 \leq x \leq s$、$0 \leq y \leq t$，其面积为 st。B 的面积是 $\mathrm{G}(t)$，因为我们是把长度为 $\mathrm{g}(y)$ 的水平窄条积分起来（“对 y 求面积”）。



R 中每一点都位于 A 或 B 之内：若 $(x,y)\in R$，则要么 $y\le \mathrm{f}(x)$，该点在 A 内；要么 $y>\mathrm{f}(x)$，即 $x<\mathrm{g}(y)$，该点在 B 内。两者的重叠部分 $A\cap B$ 只是曲线本身的一段弧，面积为零。因此

$$\mathrm{F}(s)+\mathrm{G}(t)=\text{面积}(A)+\text{面积}(B)\ge\text{面积}(A\cup B)\ge\text{面积}(R)=st,$$

这就是 $(*)$。

想一想 究竟多算了哪些不在长方形内的部分？

多出来的是 $A\cup B$ 中伸出 R 之外的部分 E。若 $t<\mathrm{f}(s)$（如图所示），B 留在 R 之内，但 A 在区域 $\mathrm{g}(t)<x\le s$、$t<y\le\mathrm{f}(x)$ 中伸出了 $y=t$ 之上。由于对每个 $x>\mathrm{g}(t)$ 都有 $\mathrm{f}(x)>t$，而且 f 连续，这个区域的面积为正，所以不等式严格成立。若 $t>\mathrm{f}(s)$，情况相同，只是角色互换：B 伸出了 $x=s$ 的右方。若 $t=\mathrm{f}(s)$，顶点 (s,t) 位于曲线上，$A\cup B$ 恰好就是 R，没有多出来的部分。

所以 $(*)$ **中等号成立当且仅当** $t=\mathrm{f}(s)$，即 (s,t) 位于曲线上的时候。

$\sin^{-1}y$ 的积分

在 $[0,\frac12\pi]$ 上取 $\mathrm{f}(x)=\sin x$。它连续、递增、通过原点，并且留在第一象限，所以上面所有结果都适用，其中 $a=\frac12\pi$、$\mathrm{f}(a)=1$ 及 $\mathrm{g}(y)=\sin^{-1}y$。

给定 $t\in[0,1]$，选取 $s=\sin^{-1}t$，它位于 $[0,\frac12\pi]$ 之内。于是 $t=\sin s=\mathrm{f}(s)$，所以 $(*)$ 中等号成立：

$$\int_0^t\sin^{-1}y\,\mathrm{d}y=\mathrm{G}(t)=st-\mathrm{F}(s).$$

接着计算容易的积分：

$$\mathrm{F}(s)=\int_0^s\sin x\,\mathrm{d}x=1-\cos s.$$

代入 $s=\sin^{-1}t$，

$$\int_0^t\sin^{-1}y\,\mathrm{d}y=t\sin^{-1}t-(1-\cos(\sin^{-1}t)),$$

正是所求。

以微分验证

由于 $\sin^{-1} t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$，它的余弦非负，所以 $\cos(\sin^{-1} t) = \sqrt{1-t^2}$。因此右方为 $t\sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}$。对于 $0 \le t < 1$，利用 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin^{-1} t = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ 及乘积法则（product rule），

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t\sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}\right) &= \sin^{-1} t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \sin^{-1} t,\end{aligned}$$

根据微积分基本定理（fundamental theorem of calculus），这正是左方的导数。两方在 $t = 0$ 时都等于 0，所以它们在 $[0, 1)$ 上相等，再由连续性，在 $t = 1$ 时亦相等。

验算

- 当 $t = 1$：公式给出 $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.5708$。从几何角度看，$y = \sin x$ 左方直至高度 1 的面积，等于长方形 $\frac{1}{2}\pi \times 1$ 减去拱形下方的面积 1。对 $\sin^{-1} y$ 在 $[0, 1]$ 上作数值积分，得 0.57080。
- 当 $t = \frac{1}{2}$：公式给出 $\frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.12782$，与辛普森法则（Simpson's rule）的结果吻合。
- 对于 $(*)$，试取 $\mathrm{f}(x) = x^2$、$s = 1$、$t = 4$：$\mathrm{F} + \mathrm{G} = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} = \frac{17}{3} > 4$；而取 $t = 1 = \mathrm{f}(1)$ 时，则得 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 = st$。

常见错误

- 写成 $\cos(\sin^{-1} t) = \pm\sqrt{1-t^2}$ 而没有选定符号：$\sin^{-1}$ 的值域决定了它取正值。
- 只说“这些区域覆盖了长方形”，却没有解释为何当 $t \ne \mathrm{f}(s)$ 时不等式严格成立；等号的问题正需要这一点。
- 忘记 f 必须是递增的：整幅图都依赖这一点。

STEP 之外

不等式 $(*)$ 就是杨氏不等式（Young's inequality）。取 $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$，它便成为 $st \le \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$，其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$；这是证明赫尔德不等式（Hölder's inequality）的关键步骤，而赫尔德不等式是分析学中最常用的工具之一。F 与 G 的这种配对，让我们初窥勒让德变换（Legendre

transform），它把拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）与哈密顿力学（Hamiltonian mechanics）联系起来。如想了解这一切背后的分析学，可以阅读 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。