详细解答

STEP I 1987，第 5 题

纯数学 · 代换积分法

> **STEP I 1987，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q5

关键思路

这个代换（substitution）的设计，是要令根号下的两个因子都变成完全平方（perfect square）：$x-\alpha$ 变成 $\sin^2\theta$ 的某个倍数，而 $\beta-x$ 则变成 $\cos^2\theta$ 的同一倍数。于是平方根恰好与 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ 互相抵消，第一个积分的被积函数（integrand）便化为常数。第二个积分多保留了一个因子 $1/x$，只要把分子分母同除以 $\cos^2\theta$，它就变成一个标准的 $\tan\theta$ 积分。

解答

第一个积分，$\alpha<\beta$ 的情况

设 $x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$。利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，

$$x-\alpha=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta-\alpha(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=(\beta-\alpha)\sin^2\theta,$$
$$\beta-x=\beta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\alpha\cos^2\theta-\beta\sin^2\theta=(\beta-\alpha)\cos^2\theta,$$

以及

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-2\alpha\cos\theta\sin\theta+2\beta\sin\theta\cos\theta=2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

至于积分上下限：$\theta=0$ 时 $x=\alpha$，$\theta=\frac{\pi}{2}$ 时 $x=\beta$。由于在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta>0$，当 θ 走遍 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 时，x 递增地走遍 $[\alpha,\beta]$ 恰好一次。

在这个范围内 $\sin\theta\geq0$ 及 $\cos\theta\geq0$，而且 $\beta-\alpha>0$，所以

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}=(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

因此

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{d}\theta = \pi,$$

即为所求。（被积函数在两端都趋于无穷大，所以严格来说这是一个反常积分（improper integral）。代换显示它是收敛（converges）的，因为变换后的被积函数是有界的常数 2。）

想一想 我们究竟在哪里用到 $\alpha < \beta$?

只在开平方根的时候：$\sqrt{(\beta-\alpha)^2}$ 等于 $\beta-\alpha$，正正是因为 $\beta-\alpha>0$。一般而言它等于 $|\beta-\alpha|$，而这一点正是下一部分的关键。

第一个积分，$\alpha > \beta$ 的情况

现在积分由较大的数 α 往下积到较小的数 β。在两者之间的区间上，$x-\alpha<0$ 且 $\beta-x<0$，所以乘积仍然是正数，被积函数依然有意义。

代换可以逐字照搬，唯一不同的是现在 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2} = \alpha-\beta$，所以

$$\frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\alpha-\beta)\sin\theta\cos\theta} = -2,$$

而积分为

$$\int_0^{\pi/2} (-2)\,\mathrm{d}\theta = -\pi.$$

还有一个更快的看法。把 α 与 β 互换时，式子 $(x-\alpha)(\beta-x)$ 保持不变，所以被积函数与第一种情况是同一个函数，只是两个字母的角色对调了。把上下限倒转会改变正负号，所以

$$\int_\alpha^\beta = -\int_\beta^\alpha = -\pi,$$

这里用了第一个结果，以 β 作为较小的端点。

第二个积分，$0 < \alpha < \beta$ 的情况

用完全相同的代换，同样地抵消后，只剩下因子 $1/x$：

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{d}\theta}{\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta}.$$

由于 $\alpha,\beta>0$，分母在整个 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上都是正数，所以这是一个正常积分。要计算它，把分子分母同除以 $\cos^2\theta$（对 $0\le\theta<\frac{\pi}{2}$ 成立）：

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\alpha+\beta\tan^2\theta}.$$

再设 $t = \tan\theta$，则 $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，而当 θ 由 0 增至 $\frac{\pi}{2}$ 时，t 由 0 走到 ∞：

$$\int_0^\infty \frac{2\,\mathrm{d}t}{\alpha+\beta t^2} = \frac{2}{\beta}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\alpha/\beta} = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left[\arctan\left(t\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right]_0^\infty$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

即为所求。我们两次用到 $\alpha > 0$：一是确保 $1/x$ 在 $[\alpha,\beta]$ 内没有奇点（singularity），二是确保 $\sqrt{\beta/\alpha}$ 是实数。

想一想 上限变成了 ∞。这会造成问题吗？

不会。关于 θ 的积分完全是普通的积分；无穷上限之所以出现，只是因为当 $\theta \to \frac{\pi}{2}$ 时 $\tan\theta \to \infty$。关于 t 的积分是收敛的，因为 arctan 趋于 $\frac{\pi}{2}$；而它等于关于 θ 的积分，因为两者都是在 $[0,\Theta]$ 上的积分当 $\Theta \to \frac{\pi}{2}$ 时的极限。

验算

- 缩放：把 x、α、β 换成 kx、$k\alpha$、$k\beta$，第一个积分不变，第二个积分则除以 k。两个答案 π 和 $\pi/\sqrt{\alpha\beta}$ 都符合这个性质。
- 令 $\alpha \to \beta$。这时在整个（极短的）区间上 $1/x \approx 1/\beta$，所以第二个积分应约为 π/β；而 $\pi/\sqrt{\alpha\beta} \to \pi/\beta$，果然如此。
- 数值上，取 $\alpha = 2$、$\beta = 7$，数值积分（quadrature）给出第二个积分为 0.83963，与 $\pi/\sqrt{14} = 0.83963$ 吻合。随机选取 $\alpha < \beta$，第一个积分全部得出 π；把端点互换则得出 $-\pi$。

常见错误

- 在 $\alpha > \beta$ 时仍然答 π。被积函数是正的，但上下限倒过来了，所以答案是 $-\pi$。
- 写下 $\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta} = (\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta$，却没有检查三个因子的正负号。

STEP 之外

这个代换有一个漂亮的几何意义。由于 $x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\cos 2\theta$，它把以 $[\alpha,\beta]$ 为直径的半圆参数化（parametrises），而 $\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ 正是该半圆在 x 处的高度。第二个积分让你初尝以围道积分（contour integration）计算积分的滋味：在复分析（complex analysis）中，两个结果都可以用留数定理（residue theorem）在短短几行内得出。Needham 的

Visual Complex Analysis（《直观复分析》）对此有精彩的阐述，而反常积分的严谨处理则见于 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。