详细解答

STEP I 1987，第 4 题

纯数学 · 对数与等比级数

STEP I 1987，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s1-q4

关键思路

以不便处理的数为底的对数（logarithm），最好先化成自然对数（natural logarithm），因为这样底数就会以一个简单的因子出现。这里每个底数都是 2 的幂，而指数 2^n 会降下来成为乘数。把每一项都用 $\ln 2$ 表示之后，这个级数（series）其实就是一个乔装了的几何级数（geometric series）。

解答

改写通项

固定 $n \geq 0$，并设 $c = \log_{2^{2^n}} \mathrm{e}$。根据提示中的定义，这表示

$$(2^{2^n})^c = \mathrm{e}.$$

两边取自然对数（两边均为正数），得

$$c \cdot 2^n \ln 2 = \ln \mathrm{e} = 1, \qquad \text{所以} \qquad \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{2^n \ln 2}.$$

作为对下标的验证，$n = 0, 1, 2$ 分别给出底数 2、4、16，与首三项吻合，其值为 $\frac{1}{\ln 2}$、$\frac{1}{2\ln 2}$、$\frac{1}{4\ln 2}$。

? **想一想** 2^n 是从哪里来的?

来自法则 $\ln(a^k) = k \ln a$，取 $a = 2$ 及 $k = 2^n$：底数 2^{2^n} 的自然对数是 $2^n \ln 2$。正是指数的“塔”令每个底数都是前一个的*平方*，而底数平方会令对数减半。

求级数之和

因此级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

这是首项为 1、公比为 $r = -\frac{1}{2}$ 的几何级数。由于 $|r| < 1$，它收敛（converges），其和为 $\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$。因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{2}{3\ln 2} = \frac{1}{\frac{3}{2}\ln 2} = \frac{1}{\ln(2^{3/2})} = \frac{1}{\ln(2\sqrt{2})},$$

这里再次用了 $\ln(a^k) = k\ln a$，以及 $2^{3/2} = 2\cdot 2^{1/2} = 2\sqrt{2}$。这就是所求的和。

验算

数值上，$\frac{1}{\ln(2\sqrt{2})} \approx 0.96180$。级数的部分和（partial sums）为 1.4427、0.7213、1.0820、0.9017、0.9919、0.9468,…，在此值两侧来回摆动，而差距每次减半，正如交错几何级数应有的表现。取六十项时，结果与 0.961797 在机器精度内一致。

常见错误

- 把 $\log_{2^{2^n}}$ 误读为 $\log_{2^{2n}}$：这样会得出底数 2、16、256,… 及错误的公比 $-\frac{1}{4}$。应该用首几项来核对下标。
- 写成 $\log_a \mathrm{e} = \ln a$，而不是 $\frac{1}{\ln a}$。换底公式（change-of-base rule）给出 $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$，而这里 $\ln b = 1$。

STEP 之外

一个无穷和究竟是否“有值”，正是分析学（analysis）入门课程的核心问题。几何级数是最基本的参照标准：许多收敛判别法，例如比值判别法（ratio test），都是通过把级数与几何级数比较来运作的。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）细致而易读地建立了这套理论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。