详细解答

# STEP I 1987，第 3 题

纯数学 · 可分离变量微分方程

**STEP I 1987，第 3 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s1-q3

## 关键思路

这条方程以 $v$ 表示时看似棘手，但左边其实很容易辨认：$x^3v' + x^2v$ 正是 $x^2$ 乘以 $xv$ 的导数（derivative）。因此，题目建议的代换（substitution）把左边变成 $x^2y'$；而右边改用 $y$ 表示后，变量可以干净利落地分离（separate）。之后只需运用部分分式（partial fractions），再小心选取正负号。

## 解答

### 变量代换

设 $y = xv$，由乘积法则（product rule）得 $y' = v + xv'$，因此

$$x^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x^2v = x^2\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right) = x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

在右边，$x^2v^2 = y^2$ 而 $v = y/x$，所以右边为

$$\frac{1+y^2}{(1+x^2)\,y/x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}.$$

方程变为

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}, \qquad \text{即} \qquad \frac{y}{1+y^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x(1+x^2)},$$

这是把两边除以 $x^3$（我们在 $x = 1$ 附近考虑，故 $x > 0$），再乘以 $y/(1+y^2)$ 所得。变量已经分离。

### 积分

左边积分得 $\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$。至于右边，用部分分式可得

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2},$$

只要把右边通分便可轻易验证。因此，当 $x>0$ 时，

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \qquad \text{因此} \qquad 1+y^2 = \frac{Ax^2}{1+x^2}$$

其中 $A = \mathrm{e}^{2C}$ 为正常数。

当 $x=1$ 时 $v=1$，故 $y=1$，于是 $2 = A/2$，即 $A=4$。因此

$$y^2 = \frac{4x^2}{1+x^2} - 1 = \frac{3x^2-1}{1+x^2}, \qquad v^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{3x^2-1}{x^2(1+x^2)}.$$

**想一想** 应该取哪一个平方根？解在哪个范围内成立？

原方程的分母含 $v$，所以解永远不能经过 $v=0$；由于解是连续的，它会保持在 $x=1$ 处的符号，即正号。因此取正平方根：

$$\boxed{v(x) = \frac{\sqrt{3x^2-1}}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

此解在 $x > 1/\sqrt{3}$ 时成立。当 $x$ 减小至 $1/\sqrt{3}$ 时，$v$ 降至 0，方程便不再成立，所以解不能延伸到该点以下。

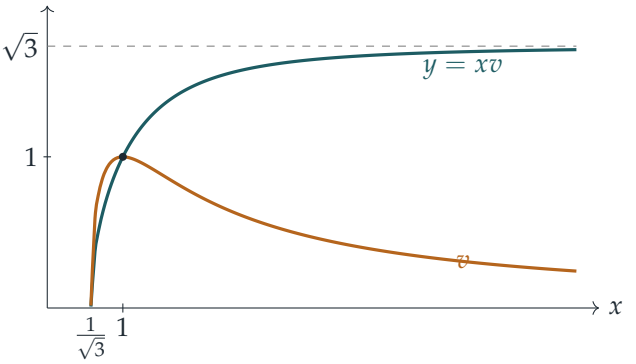
### $x$ 很大时

分子分母同除以 $x^2$，

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3-1/x^2}}{\sqrt{1+1/x^2}} \approx \frac{\sqrt{3}}{x},$$

所以当 $x\to\infty$ 时 $v(x)\to 0$。等价地说，$y = xv \to \sqrt{3}$：$y$ 的图像有水平渐近线（horizontal asymptote）$y=\sqrt{3}$，而 $v = y/x$ 则像 $\sqrt{3}/x$ 那样衰减。

事实上，起点正是最高点：设 $u = x^2$，则 $(3u-1)/(u^2+u)$ 的导数的分子为 $-(3u+1)(u-1)$，所以 $v$ 上升至在 $x=1$ 处的最大值 1，然后递减并趋向 0。




## 验算

- 当 $x = 1$：$v = \sqrt{2}/(1 \cdot \sqrt{2}) = 1$，符合要求。
- 代回验证：由 $1 + y^2 = 4x^2/(1 + x^2)$ 作隐函数微分（implicit differentiation）得 $2yy' = 8x/(1 + x^2)^2$，而 $(1 + y^2)/(x(1 + x^2)) = 4x/(1 + x^2)^2$，所以 $yy'/(1 + y^2) = 1/(x(1 + x^2))$，与预期相符。
- 数值上，以龙格—库塔法（Runge–Kutta method）从 $(1, 1)$ 起逐步求解原方程，得 $v(10) \approx 0.172058$，与公式吻合；而在 $x = 10^4$ 时，公式给出 $xv \approx 1.73205 \approx \sqrt{3}$。

## 常见错误

- 把极限答成 $\sqrt{3}$：那是 $y$ 的极限，但题目问的是 $v$，它趋向 0。
- 错误地处理常数的指数：$\ln(1 + y^2) = \ln \frac{x^2}{1+x^2} + 2C$ 应得出 $1 + y^2 = Ax^2/(1 + x^2)$，即一个相乘的常数，而不是 $x^2/(1 + x^2) + 2C$。
- 开平方时写上 $\pm$ 却没有作出取舍：条件 $v(1) = 1$ 及不容许 $v = 0$ 已确定要取正号。

## STEP 之外

这里的代换之所以奏效，是因为左边在整体相乘后成为一个恰当导数（exact derivative），这与积分因子（integrating factor）和齐次方程（homogeneous equation）背后的想法如出一辙。处理正负号和定义域时所需的谨慎，让我们初步窥见存在性与唯一性理论（existence and uniqueness theory）：经过某一给定点的解会一直存在，直至遇到令方程失去意义的地方，在这里就是 $v = 0$。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）讨论了可分离方程（separable equation），以及解能延伸多远的问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。