详细解答

STEP I 1987，第 2 题

纯数学 · 圆填充的面积

STEP I 1987，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s1-q2

关键思路

把各个小圆的圆心连起来。这些圆心全都位于半径为 R 的圆上，即恰好在两个大圆的正中间；它们构成一个正 n 边形（regular polygon），而这个多边形的各边都穿过相邻小圆的切点。这个多边形正是划分 Y（在多边形内）和 X（在多边形外）两部分的分界线。因此，每一块面积都可以由三种简单图形得出：多边形、圆盘，以及由多边形顶点截出的小圆扇形（sector）。

解答

n、R 与 r 的关系

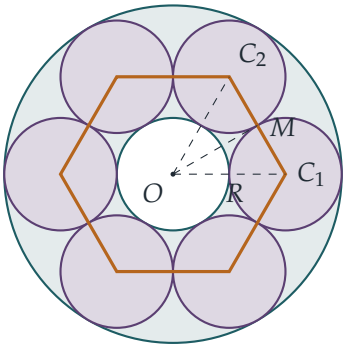
每个小圆都与两个大圆相切，所以它的圆心与公共圆心 O 的距离是 $R-r+r=R$：全部 n 个圆心都在半径为 R 的圆上。由对称性可知，这些圆心等距分布，所以相邻的圆心 C_1、C_2 在 O 处所张的角是 $2\pi/n$。

两个相邻的圆互相相切，所以 $C_1C_2=2r$。在等腰三角形（isosceles triangle）OC_1C_2 中，$OC_1=OC_2=R$；从 O 向 C_1C_2 的中点 M 作垂线，可得

$$r=C_1M=R\sin\frac{\pi}{n}.$$

这就是所求的关系。（我们需要 $n\geq 3$；若 $n=2$，内圆的半径会是 $R-r=0$。）同一个三角形亦给出

$$OM=R\cos\frac{\pi}{n}=\sqrt{R^2-r^2}.$$



上图（以 $n = 6$ 绘画）用琥珀色显示由圆心构成的多边形。它的各边都穿过相邻圆的切点，例如 M。

面积 Y

这个多边形由 n 个与 OC_1C_2 全等（congruent）的三角形组成，每个的面积是 $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$。所以

$$\text{多边形的面积} = nr\sqrt{R^2 - r^2}.$$

多边形内有甚么？它的内切圆半径（inradius）是 $OM = \sqrt{R^2 - r^2}$，而 $R^2 - r^2 \geq (R - r)^2$，因为这个不等式（inequality）移项整理后就是 $2r(R - r) \geq 0$。所以半径为 $R - r$ 的内圆盘位于多边形之内。每个顶点处都有一个小圆的扇形。正 n 边形的内角（interior angle）是 $\pi - \frac{2\pi}{n}$，所以每个这样的扇形面积是

$$\tfrac{1}{2}r^2\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right).$$

这 n 个扇形和内圆盘彼此不重叠，因为小圆之间以及小圆与内圆之间都只是相切。多边形余下的部分，恰好就是紧贴内圆的 n 个曲边三角形，而它们合起来就是 Y：

$$Y = nr\sqrt{R^2 - r^2} - \pi(R - r)^2 - n\pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right),$$

正如所求。

? **想一想** 为甚么边 C_1C_2 正是把 X 与 Y 分开的恰当位置？

边 C_1C_2 由圆心连到圆心，并穿过切点 M，所以它永远不会穿过圆与圆之间的空隙。所有紧贴内圆的空隙都在它靠 O 的一侧，而所有紧贴外圆的空隙都在另一侧。因此沿着多边形切开，便能干净地把两类空隙分开；而且它沿两条半径切开每个小圆，这就是我们得到扇形的原因。

面积 X 与 Z

在多边形之外而外圆之内的区域，我们要除去每个小圆余下的部分。余下的部分是一个优角扇形（reflex sector），角度为 $2\pi-(\pi-\frac{2\pi}{n})=\pi+\frac{2\pi}{n}$，面积为 $\pi r^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)$。因此

$$X=\pi(R+r)^2-nr\sqrt{R^2-r^2}-n\pi r^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right).$$

n 个半径为 r 的圆盘给出

$$Z=n\pi r^2.$$

当 $n\to\infty$ 时的极限

两式相加，多边形的项互相抵消，而扇形的项合并为 $n\pi r^2$：

$$\begin{aligned}X+Y&=\pi(R+r)^2-\pi(R-r)^2-n\pi r^2\\&=4\pi Rr-n\pi r^2.\end{aligned}$$

这其实就是圆环（annulus）的面积减去各小圆的面积，理应如此。因此

$$\frac{X+Y}{Z}=\frac{4\pi Rr-n\pi r^2}{n\pi r^2}=\frac{4R}{nr}-1=\frac{4}{n\sin(\pi/n)}-1,$$

这里用了 $r=R\sin(\pi/n)$。当 $n\to\infty$ 时，$\pi/n\to 0$ 且 $\dfrac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}\to 1$，所以 $n\sin(\pi/n)\to\pi$，从而

$$\frac{X+Y}{Z}\to\frac{4}{\pi}-1\approx 0.273.$$

验算

- 取 $n=3$、$R=1$，得 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$、$Y\approx 0.0646$ 及 $X\approx 3.7497$。在精细的极坐标网格上进行数值积分，把每一点分类为在某个圆内、在多边形内或在多边形外，结果在 $n=3,5,8,12$ 时均与公式吻合至四位有效数字。
- 比值 $\frac{4}{n\sin(\pi/n)}-1$ 在 $n=10$ 时为 0.2944，在 $n=100$ 时为 0.27345，在 $n=1000$ 时为 0.273240。它正逐渐逼近 $4/\pi-1=0.273240\ldots$。
- 直观地（heuristically）看，当 n 很大时，这些圆就像宽度为 $2r$ 的长条中一排直径为 $2r$ 的圆盘。每个 $2r\times 2r$ 的正方形中，圆盘占 πr^2，空隙占 $4r^2-\pi r^2$，所以比值是 $(4-\pi)/\pi$。

常见错误

- 计算扇形时误用多边形的外角（exterior angle）$2\pi/n$，而不是内角 $\pi-2\pi/n$。

- 计算 Y 时忘记除去内圆盘，或没有验证内圆盘确实位于多边形之内。

STEP 之外

最后的极限（limit）其实就是改头换面的 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$。正是同一事实，让阿基米德（Archimedes）能够用内接和外切多边形的周长把 π 夹在中间。这道题亦是圆填充密度问题（circle-packing density problem）的一个简化版本，这里问的是：这些圆能填满一个狭窄圆环的多少比例？若想严格处理这类极限，可以阅读 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。