详细解答

STEP I 1987，第 14 题

概率与统计 • 概率的等比级数

STEP I 1987，第 14 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s1-q14

关键思路

第一局打完之后，一场仍未分胜负的锦标赛便完全没有自由度可言。每局的胜者要对上该局的裁判（referee）；若锦标赛要继续未分胜负，裁判就必须胜出，因此下一局的胜者是被迫决定的。所以一切只取决于谁赢第 1 局，以及某位选手首次连胜两局的那一刻。之后各概率便化为以周期（period） 3 循环的几何级数（geometric series）。

解答

在整个过程中，每局都由上一局的胜者对上上一局的裁判。上一局的负方在旁担任裁判，因此不可能赢当前这一局。

第 (i) 部分

第 1 局：A 击败 B，由 B 担任第 2 局的裁判。第 2 局是 A 对 C，而 C 胜出，这是可能的。第 3 局是 C 对 B，而 B 胜出，这同样可能。但没有人连胜两局，所以在 ACB 之后锦标赛仍未分胜负，必须继续。因此 ACB **不是**一场完整锦标赛的纪录（它只是一场锦标赛的开头）。

第 (ii) 部分

A 赢了第 1 局后，第 2 局是 A 对 C，由 B 担任裁判。所以 B 不可能赢第 2 局，ABB 是**不可能**的。

第 (iii) 部分

与 (i) 一样，首三局 ACB 是可能的，而第 3 局是 C 对 B，由 A 担任裁判。所以第 4 局是 B 对 A，而 B 可以赢这一局。这时 B 连赢了第 3 和第 4 局，锦标赛结束。因此 $ACBB$ **是**一场完整的锦标赛，由 B 在四局内胜出。

5 局后仍未分胜负

设 X 赢第 1 局，其中 X 是 A 或 B，并设 Y 为另一人。若锦标赛要保持未分胜负，每局都必须由**不是**上一局胜者的选手胜出，而这只能是上一局的裁判。这就迫使纪录为

$$X\,C\,Y\,X\,C\,Y\,X\,\ldots$$

因为每位新的胜者都是上一局的裁判。具体来说，第 2 局是 X 对 C（由 Y 担任裁判），所以 C 必须胜出。第 3 局是 C 对 Y（由 X 担任裁判），所以 Y 必须胜出。第 4 局是 Y 对 X，所以 X 必须胜出，如此类推，周期为 3。

第 1 局谁胜都可以。之后，每多一局保持未分胜负的概率都是 $\frac{1}{2}$，因为各局互相独立（independent），而且每位选手的胜算均等。所以

$$P(n\text{ 局后仍未分胜负}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad P(5\text{ 局后仍未分胜负}) = \tfrac{1}{16}.$$

谁胜出，何时胜出

锦标赛在第 n 局（对 $n \geq 2$）结束，当且仅当 $n-1$ 局后仍未分胜负，而第 $n-1$ 局的胜者再次胜出。其概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$。冠军就是第 $n-1$ 局的胜者，即被迫序列中的第 $(n-1)$ 个字母。记 $k = n-1$，则：

$k \bmod 3$	1	2	0
若 A 赢第 1 局，冠军为	A	C	B
若 B 赢第 1 局，冠军为	B	C	A

所以锦标赛在第 $k+1$ 局结束的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$。若 $k \equiv 2 \pmod 3$，这整个概率都归 C。否则它由 A 和 B 平分，各得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$。

> ? **想一想** 为甚么在 $k \equiv 2$ 时 C 得到全部概率，而在其他时候只得一半?

无论谁赢第 1 局，C 永远是被迫序列中的第二个字母。所以两个分支都在同样的时刻让 C 胜出。A 和 B 在两个分支之间互换角色，所以他们各自只能取得自己占据该位置的那一个分支。

在 5 局或以内胜出

这里 $n = 2,3,4,5$，所以 $k = 1,2,3,4$：

$$P(A \text{ 胜出，局数} \le 5) = \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=1} + \underbrace{\tfrac{1}{16}}_{k=3} + \underbrace{\tfrac{1}{32}}_{k=4} = \tfrac{11}{32},$$
$$P(B \text{ 胜出，局数} \le 5) = \tfrac{11}{32} \quad \text{（由 } A \text{ 与 } B \text{ 之间的对称性），}$$
$$P(C \text{ 胜出，局数} \le 5) = \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=2}.$$

验算一下，$\frac{11}{32} + \frac{11}{32} + \frac{8}{32} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$，与 5 局后仍未分胜负的概率吻合。

最终胜者

由于 $P(n \text{ 局后仍未分胜负}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$，锦标赛以概率 1 结束。所以我们只需对所有 $k \ge 1$ 求和。每个剩余类（residue class）都给出一个公比为 $\frac{1}{8}$ 的几何级数：

$$P(C \text{ 胜出}) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{256} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/8} = \frac{2}{7},$$
$$P(A \text{ 胜出}) = \underbrace{\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \cdots\right)}_{k \equiv 1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{128} + \cdots\right)}_{k \equiv 0} = \frac{1/4}{7/8} + \frac{1/16}{7/8} = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14},$$

正如所求。由对称性，$P(B \text{ 胜出}) = \frac{5}{14}$ 亦然，而且确实 $\frac{5}{14} + \frac{5}{14} + \frac{2}{7} = 1$。

所以第一局在旁轮空的 C 处于劣势：$\frac{2}{7} \approx 0.286$，而其余两人各有 $\frac{5}{14} \approx 0.357$。

验算

- 三个在 5 局内胜出的概率之和为 $\frac{15}{16}$，而最终胜出的概率之和为 1。
- 以分数对所有可能的对局序列作精确枚举，确认了 $\frac{1}{16}$、$\frac{11}{32}$、$\frac{11}{32}$、$\frac{1}{4}$。计算至 60 局，得出 A 和 B 的值为 0.357142…，C 的值为 0.285714…。
- 求 C 的另一个快捷方法：设 c 为 C 胜出的概率。第 1 局后，C 立即胜出的概率为 $\frac{1}{4}$。若三局之后局面回到相同的情况（概率为 $\frac{1}{8}$），便重新开始，所以 $c = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}c$，得 $c = \frac{2}{7}$。

常见错误

- 说 ACB 是有效的纪录：其中每一局都是可能的，但没有人连胜两局，所以锦标赛还未结束。
- 忘记上一局的负方担任裁判，因而不能赢下一局（这排除了 ABB）。

► 在 $k \equiv 2$ 时只给 C 一半的概率：C 在两个分支中都在这些时刻胜出。

STEP 之外

这个锦标赛是一条马可夫链（Markov chain）：每局之后的状态就只是“上一局谁赢、谁当裁判”，而当链被吸收（absorbed）时冠军便决定了。“验算”一节中的首步分析（first-step argument），即通过以下一步发生的事为条件，为某个概率写出方程，是求吸收概率（absorption probability）的标准方法，而且无须对级数求和。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）在大学一年级程度介绍马可夫链与吸收。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。