详细解答

# STEP I 1987，第 13 题

力学 · 变力

> **STEP I 1987，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q13

## 关键思路

力的规律在 $x = 0$ 处改变，因此运动分成几个阶段，每个阶段都由一条简单的线性微分方程（differential equation）支配。在正方向的一侧，力是与位移成正比的回复力（restoring force），即简谐运动（simple harmonic motion）；在负方向的一侧，力是与速度成正比的阻力（resistance），令速率呈指数衰减（exponential decay）。一个阶段结束时的位置和速度，就是下一个阶段的初始条件（initial conditions）。真正的问题在于共有多少个阶段：质点究竟会不会回来？

## 解答

### 模型

把物体视为 $x$ 轴上只受所给的力作用的质点，并记 $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$。牛顿第二定律（Newton's second law）$m\ddot{x} = \mathrm{F}$ 给出

$$\ddot{x} = -\mu^2 x \quad (x \geq 0), \qquad \ddot{x} = -\kappa\dot{x} \quad (x < 0).$$

质量互相抵消，因此与答案无关。

### 第一阶段：$x \geq 0$ 时的简谐运动

由于 $v_0 > 0$，质点立即进入 $x > 0$ 的区域，在那里 $\ddot{x} = -\mu^2 x$。这是角频率（angular frequency）为 $\mu$ 的简谐运动，其通解（general solution）为

$$x = A\cos\mu t + B\sin\mu t.$$

条件“$t=0$ 时 $x=0$”给出 $A=0$，而“$t=0$ 时 $\dot{x}=B\mu=v_0$”给出 $B=v_0/\mu$。因此

$$x=\frac{v_0}{\mu}\sin\mu t,\qquad \dot{x}=v_0\cos\mu t.$$

只要 $x\geq 0$，即 $\sin\mu t\geq 0$，这个解便成立，也就是 $0\leq t\leq \pi/\mu$。质点在 $t=\pi/(2\mu)$ 时到达最大位移 $v_0/\mu$，并在

$$t=T=\frac{\pi}{\mu},\qquad \text{此时速度为}\qquad \dot{x}=v_0\cos\pi=-v_0.$$

时返回原点。它回来时的速率与出发时相同，因为在这一侧能量守恒（力 $-m\mu^2x$ 来自位能（potential energy）$\frac{1}{2}m\mu^2x^2$，而位能在原点为零）。

### 第二阶段：$x<0$ 时的受阻运动

质点以速度 $-v_0$ 进入 $x<0$ 的区域，在那里 $\ddot{x}=-\kappa\dot{x}$。记 $u=\dot{x}$，这就是一阶方程（first-order equation）$\mathrm{d}u/\mathrm{d}t=-\kappa u$，满足“$t=T$ 时 $u=-v_0$”的解为

$$\dot{x}=-v_0\,\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}.$$

利用“$t=T$ 时 $x=0$”积分：

$$x=\int_T^t -v_0\,\mathrm{e}^{-\kappa(s-T)}\,\mathrm{d}s=-\frac{v_0}{\kappa}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}\right).$$

**想一想** 质点会不会回到 $x\geq 0$，开始第三个阶段?

不会。对每个 $t>T$，速度 $-v_0\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}$ 都是负数，所以在整个阶段中 $x$ 不断减少；对所有 $t>T$，它都严格为负，上面的公式永远成立。阻力令质点减速，却永远不会令它反向。当 $t\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}\to 0$，因此质点趋近点 $x=-v_0/\kappa$，但永远不会到达。

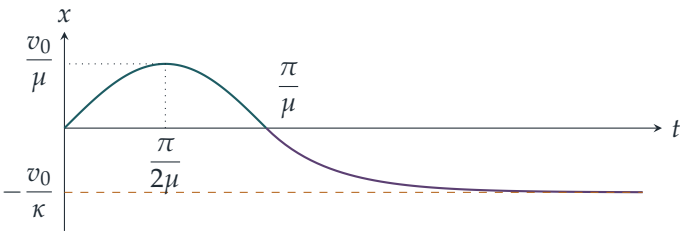
### 答案

$$x=\begin{cases}\dfrac{v_0}{\mu}\sin\mu t, & 0\leq t\leq\dfrac{\pi}{\mu},\\[2ex] -\dfrac{v_0}{\kappa}\left(1-\mathrm{e}^{-\kappa(t-\pi/\mu)}\right), & t>\dfrac{\pi}{\mu}.\end{cases}$$

两段在 $t=\pi/\mu$ 处都有 $x=0$ 和 $\dot{x}=-v_0$，所以图像在该处是光滑的（斜率连续），尽管 $\ddot{x}$ 从 0 跳到 $\kappa v_0$。

### 草图

图像先是轴上方半个正弦曲线的拱形，接着是一条以相同斜率 $-v_0$ 离开原点的曲线，并逐渐趋平，趋近渐近线（asymptote）$x=-v_0/\kappa$。（草图取 $\mu=1$、$\kappa=1$。）




一般而言，峰高 $v_0/\mu$ 与渐近线的深度 $v_0/\kappa$ 互不相关：阻力较弱（$\kappa$ 较小）时，质点会向左漂移很远。

## 验算

- 单位：$\mu$ 和 $\kappa$ 的单位都是 $\mathrm{s}^{-1}$，所以 $v_0/\mu$ 和 $v_0/\kappa$ 都是长度，理应如此。
- 极限情况：当 $\kappa \to 0$ 时没有阻力，而确实 $-\frac{v_0}{\kappa}(1-\mathrm{e}^{-\kappa s}) \to -v_0 s$，即以速率 $v_0$ 作匀速运动。
- 数值验证：取 $\mu = 1.7$、$\kappa = 0.9$、$v_0 = 2.2$，用龙格—库塔法（Runge–Kutta method）逐步求解运动方程，在 $0 \le t \le 15$ 范围内与公式的误差在 $3 \times 10^{-5}$ 以内；质点的峰值为 $x = 1.2941 = v_0/\mu$，最终停在 $x = -2.4444 = -v_0/\kappa$ 附近。

## 常见错误

- 第二阶段的时间由 $t = 0$ 而不是由 $t = \pi/\mu$ 起计：指数必须是 $-\kappa(t - \pi/\mu)$。
- 忘记检查质点会否重新进入 $x \ge 0$；题目要求的是其后的整个运动，所以“没有第三阶段”这个结论需要一句理由支持。

## STEP 之外

这里的力在 $x = 0$ 两侧各是一个不同的线性表达式，属于分段线性系统（piecewise-linear system）；把各段的解拼接起来、在切换点匹配位置和速度的技巧，是微分方程入门课程处理这类系统（以及碰撞和摩擦问题）的标准方法。若同时加入两项，得 $\ddot{x} + \kappa\dot{x} + \mu^2 x = 0$，这就是阻尼谐振子（damped harmonic oscillator），它的欠阻尼（underdamped）、临界阻尼（critically damped）和过阻尼（overdamped）三种情况，是任何力学入门课程的核心例子。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对阻尼振子有细致的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。