详细解答

STEP I 1987，第 12 题

力学 · 抛体与恢复系数

> **STEP I 1987，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q12

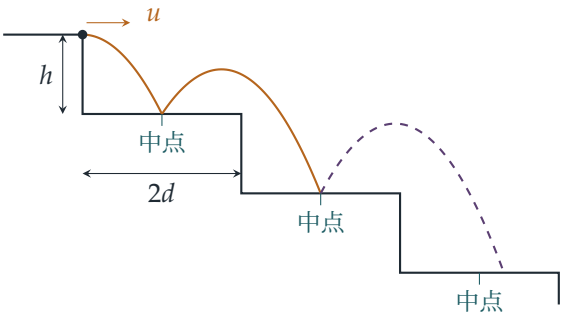
关键思路

在两次反弹之间，粒子是一个抛射体（projectile）；而（台阶光滑时）每次反弹只会把速度的铅直分量反向并按比例缩小，所以水平速率始终不变。这意味著水平距离决定了每段飞行的时间，而飞行时间加上一级台阶的落差又决定了铅直速率。所有量都可以用第一次下落的时间来表示，令代数运算非常简短。

解答

模型

把粒子视为质点（point mass），忽略空气阻力，并假设台阶光滑且水平，因此每次撞击不改变水平速度，而铅直速度则乘以 $-e$。设粒子被踢出时的水平速率为 u，并设 t_1 为第一段飞行的时间。



实线弧是首两段飞行；虚线弧是接下来实际发生的情况（见最后一部分）。

恢复系数

第一段飞行。粒子开始时没有铅直速度，下落 h，并水平移动 d（半个台阶宽度，即到达第一级台阶的中点）。因此

$$h = \tfrac{1}{2}gt_1^2, \qquad d = ut_1.$$

粒子以向下的铅直速率 gt_1 撞击第一级台阶，然后以向上的铅直速率 egt_1 离开，水平速率仍是 u。

第二段飞行。由第一级台阶的中点到第二级台阶的中点，水平距离为 $2d$。由于水平速率仍是 $u = d/t_1$，这段飞行历时

$$T = \frac{2d}{u} = 2t_1.$$

在这段时间内，粒子最终必须下降高度 h。取向上为正，

$$\begin{aligned} -h &= (egt_1)(2t_1) - \tfrac{1}{2}g(2t_1)^2 \\ &= (2e-2)\,gt_1^2 \\ &= (2e-2)(2h), \end{aligned}$$

其中用了 $gt_1^2 = 2h$。两边除以 h 得 $-1 = 4e - 4$，所以

$$e = \tfrac{3}{4}.$$

（在这段飞行中，粒子越过第一级台阶边缘时，位于该台阶上方 $egt_1 \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}h$ 的高度，所以它确实能越过边缘。）

能否一直持续下去?

> **想一想** 如果这个规律持续下去，之后每一段飞行必须是怎样的?

每段由一级台阶中点飞到下一级台阶中点的飞行，都以速率 u 水平移动 $2d$，所以每段都历时 $2t_1$，而且每段都必须恰好下降 h。由上面的计算可知，每次反弹后瞬间向上的铅直速率 w 必须满足

$$-h = w(2t_1) - 2gt_1^2 = 2wt_1 - 4h, \qquad \text{所以} \qquad w = \frac{3h}{2t_1} = \tfrac{3}{4}gt_1.$$

因此每次反弹后，粒子都必须以铅直速率 $\frac{3}{4}gt_1$ 离开；由于 $e = \frac{3}{4}$，它到达每一级台阶时的铅直速率都必须恰好是 gt_1。

这在第一级台阶成立，但在第二级台阶并不成立。经过历时 $2t_1$ 的飞行到达第二级台阶时，其铅直速度为

$$\tfrac{3}{4}gt_1 - g(2t_1) = -\tfrac{5}{4}gt_1,$$

所以它以向下速率 $\frac{5}{4}gt_1$（而非 gt_1）撞击第二级台阶，并以向上速率 $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}gt_1=\frac{15}{16}gt_1>\frac{3}{4}gt_1$ 反弹。所以这是**不可能的**：粒子不能击中每一级台阶的中点。事实上，它会越过第三级台阶的中点。设第三段飞行历时 st_1，则

$$-h=\tfrac{15}{16}gt_1(st_1)-\tfrac{1}{2}gs^2t_1^2 \quad\Longrightarrow\quad s^2-\tfrac{15}{8}s-1=0 \quad\Longrightarrow\quad s=\frac{15+\sqrt{481}}{16}\approx 2.31,$$

所以它水平移动约 $2.31d$，落在第三级台阶上、中点以外约 $0.31d$ 处（仍在该台阶上，因为远端边缘在 $3d$ 之外）。

验算

- $e=\frac{3}{4}$ 与 g、h 或 d 无关，这是理所当然的：把整道楼梯按比例放大或缩小，并不会改变路径的形状。
- 以 $g=9.8$、$h=d=1$ 及 $e=0.75$ 进行数值模拟，粒子落在 $x=1.000$ 及 $x=3.000$（首两级台阶的中点），然后落在 $x\approx 5.308$，与上面预测的 $3+2.308$ 吻合。
- 若没有反弹（$e=0$），第二段飞行在时间 $2t_1$ 内会下降 $4h$；反弹必须补回其中的 $3h$，即 $2t_1\cdot w=3h$，与所得结果一致。

常见错误

- 把第一段水平距离当成 $2d$ 而不是 d：粒子由边缘出发，落在第一级台阶的中点。
- 在反弹时改变了水平速率。在光滑表面上，冲量（impulse）是铅直的，所以只有铅直分量会改变。
- 因为每段飞行看似相同而得出“可以”的结论：到达时的速率会不断增大，所以反弹也会随之增大。

STEP 之外

弹跳的粒子是*离散动力系统*（discrete dynamical system）的一个简单例子：某次反弹后瞬间的状态，经由一个固定的映射决定下一次反弹后的状态；而问运动能否重复，就是问这个映射的不动点（fixed point）。在这里，不动点（反弹速率为 $\frac{6}{7}gt_1$，只会落低 $\frac{4}{7}h$）与这道楼梯并不相容，所以没有任何周期运动（periodic motion）能符合。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对碰撞与冲量有细致的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。