详细解答

STEP I 1987，第 11 题

力学 · 圆周运动与能量

STEP I 1987，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/87-s1-q11

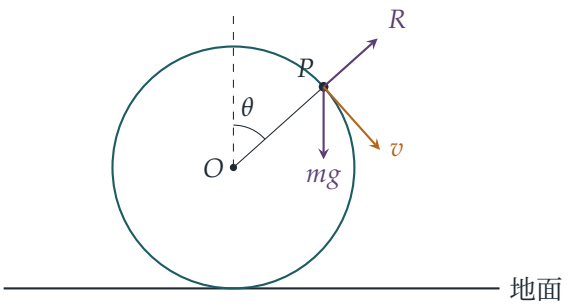
关键思路

质点留在球面上时作圆周运动（circular motion），因此由两条方程支配：能量守恒（conservation of energy）给出其速率，而沿半径方向应用牛顿（Newton）第二定律则给出法向反作用力（normal reaction）。当反作用力降至零的一刻，质点便离开球面。此后质点成为抛射体（projectile），所以其水平速度不再改变；把这一点与由顶部一直到地面的能量守恒结合，便可得出铅直速度，而毋须求出轨迹。

解答

模型

把质点视为一个质点（point mass），置于一个光滑、固定的球面上，球心为 O，位于地面之上高度 r 处（球体搁在地面上）。“轻轻移动”的意思是质点从顶部出发时速率可忽略不计。设 P 为质点所在位置，θ 为 OP 与向上铅垂线之间的角，v 为其速率。作用于质点的力只有重量 mg 及沿 OP 向外的法向反作用力 R。



何处离开球面

质点已下降高度 $r - r\cos\theta$，因此由能量守恒（反作用力与运动方向垂直，故不作功）得

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgr(1-\cos\theta), \qquad \text{所以} \qquad v^2 = 2gr(1-\cos\theta).$$

质点与球面接触时沿半径为 r 的圆运动，因此其指向 O 的加速度为 v^2/r。沿指向 O 的方向分解：

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{r} = 2mg(1-\cos\theta), \qquad \text{所以} \qquad R = mg(3\cos\theta - 2).$$

在顶部时 $R = mg > 0$，而 R 随 θ 增大而减少。当 $R = 0$ 时质点离开球面，即当

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad v^2 = \tfrac{2}{3}gr.$$

想一想 速度与水平线所成的角，是哪一个角？

速度沿圆的切线（tangent）方向，而切线与半径 OP 垂直。半径与铅垂线成角 θ，所以切线与水平线所成的角同样是 θ（把两条线都转一个直角即可）。因此，质点离开球面的一刻，正以水平线之下

$$\cos^{-1}\tfrac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

的角度向下运动。

撞击地面

离开球面的一刻，速度的水平分量为

$$v\cos\theta = \sqrt{\tfrac{2}{3}gr}\cdot\tfrac{2}{3}, \qquad \text{所以} \qquad (v\cos\theta)^2 = \tfrac{8}{27}gr.$$

此后唯一的作用力是重力，所以这个水平分量直至质点到达地面都保持不变。（质点不会再碰到球面：一旦 R 会变成负数，球面向外弯离的速度便快于质点下堕的速度；而质点落地点与通过 O 的铅垂线的水平距离约为 $1.46r$，远离球体。）

现在对整个运动应用能量守恒，由顶部（高度 $2r$）静止开始，一直到地面。质点以速率 V 撞击地面，其中

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = mg(2r), \qquad \text{所以} \qquad V^2 = 4gr.$$

设 V_y 为撞击时速度的铅直分量，则 $V^2 = (v\cos\theta)^2 + V_y^2$，所以

$$V_y^2 = 4gr - \tfrac{8}{27}gr = \tfrac{100}{27}gr, \qquad V_y = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}}.$$

因此，质点撞击地面时动量（momentum）的铅直分量的大小为

$$mV_y = \frac{10m}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}} = \frac{10m\sqrt{3gr}}{9},$$

方向向下。

验算

- 直接用抛射体运动计算：质点在高度 $r + r\cos\theta = \frac{5}{3}r$ 处离开，向下的铅直速率为 $v\sin\theta$，其中 $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$，所以 $(v\sin\theta)^2 = \frac{10}{27}gr$。再下堕 $\frac{5}{3}r$ 会增加 $2g \cdot \frac{5}{3}r = \frac{90}{27}gr$，再次得到 $V_y^2 = \frac{100}{27}gr$。
- $V_y^2 = \frac{100}{27}gr \approx 3.70gr$ 比 $V^2 = 4gr$ 略小，这是必然的，因为有少量能量留在水平运动之中。
- 以数值方法逐步模拟运动（取 $g = 9.81$、$r = 1.3$、$m = 2$），得出在 48.19° 处离开球面，铅直动量为 13.745，与 $\frac{10m\sqrt{3gr}}{9}$ 吻合；轨迹一直留在球体之外。

常见错误

- 由地面而非由球顶量度下降高度：在球面上，下降的高度是 $r(1-\cos\theta)$。
- 忘记离开球面后水平速度固定不变，误把 $V_y^2 = 4gr$ 写出来，仿佛全部动能都属于铅直方向。
- 误以为速度与水平线成角 $90^\circ - \theta$；那是半径的角度，而非切线的角度。

STEP 之外

“反作用力消失时便离开接触面”这个条件，是约束力（constraint force）的第一个例子：约束力会自行调节，使质点留在某个曲面上，而且只能推、不能拉。在拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）中，这类约束从一开始便纳入方程，而反作用力则以拉格朗日乘数（Lagrange multiplier）的形式出现。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）是在更高层次上练习圆周运动和能量方法的绝佳教材。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。