详细解答

STEP I 1987，第 10 题

力学 • 弹性绳

> **STEP I 1987，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q10

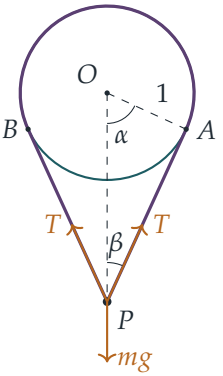
关键思路

质点把橡皮圈的底部从圆柱上拉下来，因此橡皮圈分成两部分：一段仍然紧贴圆柱上方的圆弧，以及两段直线部分；这两段直线沿切线（*tangent*）离开圆柱，并在质点处相交。拉伸后的长度纯粹是几何问题：利用直角三角形，可以求出直线部分的长度，以及它们在轴上所对的角。由于圆柱是光滑（smooth）的，橡皮圈各处的张力（tension）都相同；在质点处分解力，就能把这张力与 mg 联系起来，再用胡克定律（Hooke's law）便可求出 λ。

解答

模型

我们把橡皮圈视为一条自然长度（natural length）为 2π、遵从胡克定律的轻弹性绳，圆柱视为光滑，质点视为点质量。我们在一个竖直横截面上分析：圆柱是一个单位圆，圆心 O 在轴上；质点位于 P，在 O 竖直下方距离 x 处。橡皮圈要离开圆柱，必须有 $x > 1$。



由于图形关于通过 O 的竖直线对称，橡皮圈在两点 A 和 B 离开圆柱，两边各一点。一条拉紧的绳离开光滑曲线时，是沿切线离开的，因此 PA 在 A 点与圆相切，即 $OA \perp AP$。设 $\alpha = \angle AOP$，$\beta = \angle APO$。

拉伸后的长度

三角形 OAP 在 A 处是直角，$OA = 1$，斜边 $OP = x$。因此

$$AP = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{x}, \qquad \sin\beta = \frac{1}{x}.$$

除了经底部从 A 到 B 的一段（在 O 处所对的角为 2α）之外，橡皮圈处处与圆柱接触。所以接触部分的圆弧所对的角是 $2\pi - 2\alpha$，在单位圆上其长度就是 $2\pi - 2\alpha$。加上两段直线部分，拉伸后的长度为

$$\boxed{L = 2\sqrt{x^2 - 1} + 2\pi - 2\arccos\frac{1}{x}}$$

其中由于 $x > 1$，$\arccos(1/x)$ 介于 0 与 $\frac{\pi}{2}$ 之间。因此伸长量（extension）为

$$L - 2\pi = 2\sqrt{x^2 - 1} - 2\arccos\frac{1}{x}.$$

? **想一想** 橡皮圈绕着圆柱弯曲。为甚么直线部分的张力与圆弧部分的张力相同?

对于与光滑表面接触的一小段橡皮圈，圆柱施加的力只有垂直于表面的法向力，因此没有任何力可以抵消沿橡皮圈方向的张力变化。所以张力 T 在整条橡皮圈上都是常数，胡克定律可以应用于整条橡皮圈：

$$T = \frac{\lambda\,(L - 2\pi)}{2\pi}.$$

（如果圆柱是粗糙的，张力在圆弧上就可能有变化，这一步便不成立。）

质点的平衡

作用在质点上的力有重量 mg，以及沿 PA 和 PB 方向的张力 T，两者与向上竖直方向的夹角均为 β。由对称性，水平分量互相抵消。竖直方向分解，

$$2T\cos\beta = mg, \qquad \text{其中} \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

所以

$$T = \frac{mgx}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

$x = 2$ 的情况

此时 $\cos\alpha = \frac{1}{2}$，故 $\alpha = \frac{\pi}{3}$，且 $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$。拉伸后的长度为

$$L = 2\sqrt{3} + 2\pi - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}, \qquad \text{所以} \qquad L - 2\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

张力为 $T = \dfrac{2mg}{2\sqrt{3}} = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$。由胡克定律得

$$\lambda = \frac{2\pi T}{L-2\pi} = \frac{2\pi mg/\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2\pi/3} = \frac{2\pi mg}{6 - 2\pi/\sqrt{3}} = \frac{\pi mg}{3 - \pi/\sqrt{3}},$$

分子分母同乘以 $\sqrt{3}$，

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{3}\,\pi\, mg}{3\sqrt{3} - \pi} \approx 2.65\, mg.}$$

验算

- 当 $x \to 1^+$ 时，$\arccos(1/x) \to 0$ 且 $\sqrt{x^2-1} \to 0$，所以 $L \to 2\pi$：橡皮圈刚好碰到圆柱底部而没有被拉伸，这正合理。同时 $T \to \infty$，这与以下事实吻合：两条接近水平的绳子只有在张力极大时才能承托重物。
- 当 $x = 2$ 时，$L = 2\sqrt{3} + 4\pi/3 \approx 7.653$，比 $2\pi \approx 6.283$ 稍大；而 λ 与 mg 一样具有力的单位。
- 另外，我们取 $\lambda \approx 2.6484\, mg$，以数值方法求总势能（potential energy）$-mgx + \lambda(L - 2\pi)^2/(4\pi)$ 的最小值；最小值出现在 $x = 2$，这同时证实了几何部分和张力部分的结果。

常见错误

- 把直线部分当作从 P 连到水平直径的两个端点。橡皮圈是沿切线离开的，所以它在轴的高度以下离开圆柱，位置与向下竖直方向成角 $\alpha = \arccos(1/x)$。

► 在胡克定律中只用一段直线部分的伸长量。张力是均匀的，所以应该用整条橡皮圈的伸长量 $L - 2\pi$，除以整条的自然长度 2π。

STEP 之外

“在光滑表面上张力处处相同”这一说法，是绞盘方程（capstan equation）在无摩擦情况下的特例：若摩擦系数（coefficient of friction）为 μ，绕过角度 θ 后，张力最多可以改变 $e^{\mu\theta}$ 倍。这就是为甚么一条在柱上绕几圈的绳子能够系住一艘船。上面的能量验算，也让你初步领略力学的变分观点（variational view）：平衡位置就是势能的驻点（stationary point）。若想看大学一年级程度、以这种思路处理力、摩擦和势能的教材，可读 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。