详细解答

STEP I 1987，第 1 题

纯数学 · 曲线描绘

> **STEP I 1987，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q1

关键思路

用乘积法则（product rule）求导后，会剩下一个永不为零的因子 e^{ax}，乘以 $\cos bx$ 与 $\sin bx$ 的某个组合。因此驻点（stationary points）全部来自同一条方程 $\tan bx =$ 常数，而这条方程的解是等距分布的，相邻两解相距 π/b。从一个驻点移到下一个，指数部分乘以一个固定的因子，而余弦部分则变号，这正正就是一个等比数列（geometric progression）。

解答

驻点

由乘积法则，

$$\mathrm{f}'(x) = a\mathrm{e}^{ax}\cos bx - b\mathrm{e}^{ax}\sin bx = \mathrm{e}^{ax}(a\cos bx - b\sin bx).$$

由于对所有 x 都有 $\mathrm{e}^{ax} > 0$，所以 $\mathrm{f}'(x) = 0$ 当且仅当 $a\cos bx = b\sin bx$。

> ? **想一想** 这里可以放心除以 $\cos bx$ 吗?

可以。若 $\cos bx = 0$，则 $\sin bx = \pm 1$，方程便变成 $0 = \pm b$，但因为 $b > 0$，这是不成立的。所以在任何驻点上都有 $\cos bx \neq 0$，两边相除得

$$\tan bx = \frac{a}{b}.$$

设 $\alpha = \arctan(a/b)$。因为 $a/b > 0$，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$。由于 tan 的周期（period）是 π，方程的解为 $bx = \alpha + n\pi$，因此驻点位于

$$x_n = \frac{\alpha + n\pi}{b}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{其中 } \tan\alpha = \frac{a}{b}.$$

考虑两条直角边分别为 a 和 b 的直角三角形，可得 $\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。由于 $\cos(\theta+n\pi) = (-1)^n\cos\theta$，f 在该处的值为

$$\begin{aligned}\mathrm{f}(x_n) &= \mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha+n\pi)\\ &= (-1)^n\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}\,\mathrm{e}^{na\pi/b}.\end{aligned}$$

极大还是极小？ 再求导一次，

$$\mathrm{f}''(x) = \mathrm{e}^{ax}((a^2-b^2)\cos bx - 2ab\sin bx).$$

在驻点上 $b\sin bx = a\cos bx$，所以 $2ab\sin bx = 2a^2\cos bx$，于是

$$\mathrm{f}''(x_n) = \mathrm{e}^{ax_n}\cos bx_n\,(a^2-b^2-2a^2) = -(a^2+b^2)\,\mathrm{f}(x_n).$$

因此当 $\mathrm{f}(x_n) > 0$（n 为偶数）时，x_n 是极大点（maximum）；当 $\mathrm{f}(x_n) < 0$（n 为奇数）时，x_n 是极小点（minimum）。驻点交替出现：极大、极小、极大、...

等比数列

由于 $0 < \alpha < \pi$，$x_n > 0$ 当且仅当 $n \geq 0$。所以 $x > 0$ 的驻点是 $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$，而对每个 $n \geq 0$，

$$\frac{\mathrm{f}(x_{n+1})}{\mathrm{f}(x_n)} = \frac{\mathrm{e}^{a(\alpha+(n+1)\pi)/b}\cos(\alpha+(n+1)\pi)}{\mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha+n\pi)} = \mathrm{e}^{a\pi/b}\cdot(-1) = -\mathrm{e}^{a\pi/b},$$

这里用到 $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$ 及 $\cos(\alpha+n\pi) \neq 0$。这个比值与 n 无关，所以 $\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}(x_1), \ldots$ 组成一个等比数列，首项为 $\dfrac{b\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}}{\sqrt{a^2+b^2}}$，公比（common ratio）为 $-\mathrm{e}^{a\pi/b}$，得证。

（同样的计算对负数 n 亦成立，所以事实上所有驻值组成一个向两边无限延伸的等比数列。限制 $x > 0$ 只是给它一个自然的首项。）

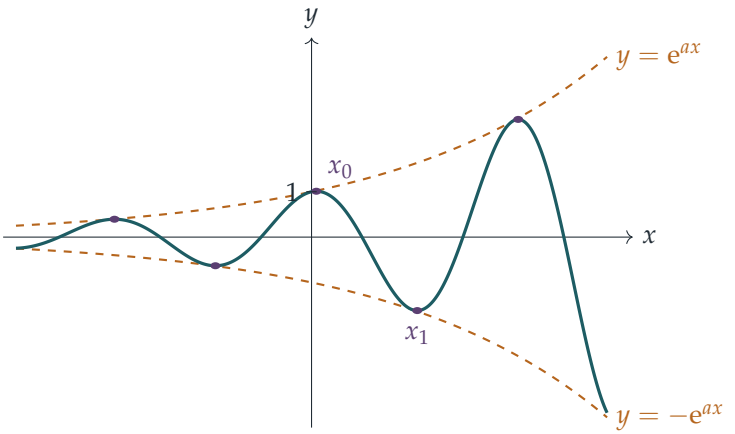
草图

所需的事实：

- 由于 $-1 \leq \cos bx \leq 1$，图像夹在曲线 $y = \mathrm{e}^{ax}$ 与 $y = -\mathrm{e}^{ax}$ 之间。在 $\cos bx = 1$（$bx = 2m\pi$）处，图像与 $y = \mathrm{e}^{ax}$ 相接；在 $\cos bx = -1$（$bx = (2m+1)\pi$）处，则与 $y = -\mathrm{e}^{ax}$ 相接。在这些点上 $\sin bx = 0$，所以 $\mathrm{f}'(x) = \pm a\mathrm{e}^{ax}$，与包络线（envelope）的斜率相同：曲线在该处与包络线相切，而不是转向。
- 零点位于 $bx = \frac{\pi}{2} + m\pi$，相邻两个相距 π/b，而且 $\mathrm{f}(0) = 1$。

- 每个转向点（turning point）$bx = \alpha + n\pi$ 都位于对应的相接点 $bx = n\pi$ 稍后的位置，因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$：不断上升的包络线把每个峰顶稍稍拉向右方。
- 当 $x \to \infty$ 时，振荡幅度无界地增大；当 $x \to -\infty$ 时，$e^{ax} \to 0$，所以 $f(x) \to 0$，但仍然不断振荡。

草图所示为 $a = 0.3$、$b = 2$ 的情况，包络线 $y = \pm e^{ax}$ 以虚线表示。



验算

- 取 $a = b = 1$：此时 $\alpha = \frac{\pi}{4}$，$x_0 = \frac{\pi}{4}$，$f(x_0) = e^{\pi/4}/\sqrt{2} \approx 1.551$，而 $f(x_1) = e^{5\pi/4}\cos\frac{5\pi}{4} \approx -35.89$。比值约为 $\approx -23.14 = -e^{\pi}$。
- 当 $a \to 0$ 时，函数变成 $\cos bx$：$\alpha \to 0$，转向点移到 $bx = n\pi$，比值趋向 -1，得出大家熟悉的 $1, -1, 1, \ldots$
- 我们以数值方法对 500 组随机的 (a, b) 作验证，确认了 $f'(x_n) = 0$、$f(x_n)$ 与上述公式相符、$f''(x_n) = -(a^2 + b^2)f(x_n)$、相邻比值等于 $-e^{a\pi/b}$，以及 f' 没有其他零点。

常见错误

- 把转向点放在曲线与包络线相接之处，即 $bx = n\pi$。这些点的斜率是 $\pm ae^{ax} \neq 0$；真正的转向点稍稍偏右。
- 只取 $bx = \alpha$，忘记了 $\tan bx = a/b$ 的通解（general solution）$bx = \alpha + n\pi$。
- 漏掉比值中的负号：余弦在相邻两个驻点之间变号，所以驻值交替为极大、极小。

STEP 之外

函数 $e^{ax}\cos bx$ 是 $e^{(a+ib)x}$ 的实部(real part),而这类函数正正就是那些辅助方程(auxiliary equation）有复数根的线性微分方程（linear differential equation）$y''+py'+qy=0$ 的解。当 $a<0$ 时，得到的是阻尼振动（damped oscillation），例如有摩擦力的摆；当 $a>0$ 时（如本题），则是一个振荡不断增大的不稳定系统。相邻峰值之比是常数，而这个比值的对数就是工程师所说的对数衰减率（logarithmic decrement）。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）在二阶线性方程一章中详细发展了这个题材；Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）则说明了为甚么乘以 $e^{(a+ib)x}$ 会描出一条螺线。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。