详细解答

STEP III 2025，第 9 题

力学 • 质心

STEP III 2025，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 11.8 节倾斜的平衡中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/tilted-equilibria.html

关键思路

一个放在桌上的立体只在一点与桌面接触，而且只受两个力作用：作用于质心（centre of mass）G 的重量，以及作用于接触点的反作用力（reaction）。这两个力要互相平衡，必须作用在同一条铅垂线上，所以曲面在接触点的法线（normal）必须通过 G。第 (i) 部分找出 G 的位置，第 (ii) 部分告诉我们曲面的法线与轴相交于何处，第 (iii) 部分则把两者结合起来：我们数一数曲面上有多少点的法线通过 G。

解答

全文中，把曲线写成 $y = \dfrac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$，其中 $0 \le x \le r$。它由 y 轴上的 $(0, r)$ 向下延伸至 x 轴上的 $(r, 0)$，期间 $y \ge 0$。

第 (i) 部分

我们把立体切成绕 y 轴的薄圆柱壳（cylindrical shells）。半径为 x、厚度为 δx、高度为 y 的圆柱壳，体积为 $2\pi x y\,\delta x$；由于密度均匀，它的质心位于高度 $\frac{1}{2}y$ 处。因此体积及关于 xz 平面的力矩（moment）分别为

$$V = 2\pi \int_0^r xy\,\mathrm{d}x, \qquad V\bar{y} = 2\pi \int_0^r x \cdot \tfrac{1}{2}y^2\,\mathrm{d}x.$$

第一个积分为

$$\int_0^r x\,\frac{r^n - x^n}{r^{n-1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{r^{n-1}}\left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2}\right) = \frac{n\,r^3}{2(n+2)},$$

所以 $V = \dfrac{\pi n r^3}{n+2}$。至于第二个积分，把 $(r^n - x^n)^2$ 展开：

$$\begin{aligned}\int_0^r x\,\frac{(r^n - x^n)^2}{r^{2n-2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{r^{2n+2}}{r^{2n-2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2}\right)\\ &= r^4 \cdot \frac{(n+2)^2 - 4(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)},\end{aligned}$$

所以 $V\bar{y} = \pi \cdot \dfrac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)}$。两者相除，

$$\bar{y} = \frac{\pi n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n+2}{\pi n r^3} = \frac{nr}{2(n+1)},$$

此即所求。由对称性可知，质心位于 y 轴上。

第 (ii) 部分

求导得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{nx^{n-1}}{r^{n-1}}$，在 $x = rp$ 处其值为 $-np^{n-1}$。由于 $p > 0$，此值不为零，所以法线的斜率（gradient）为 $\dfrac{1}{np^{n-1}}$，方程为

$$y - r(1 - p^n) = \frac{x - rp}{np^{n-1}}.$$

代入 $x = 0$，

$$Y = r(1 - p^n) - \frac{rp}{np^{n-1}} = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right),$$

此即所求结果。

当 $n = 4$ 时，$Y(p) = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4}p^{-2}\right)$，且

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = \frac{r(1 - 8p^6)}{2p^3}.$$

? **想一想** 我们怎样知道这个驻点（stationary point）给出的是最大值，而不只是局部（local）最大值?

对于 $p > 0$，$\mathrm{d}Y/\mathrm{d}p$ 的正负号与 $1 - 8p^6$ 的相同：当 $p^6 < \frac{1}{8}$ 时为正，当 $p^6 > \frac{1}{8}$ 时为负。因此 Y 递增至 $p^6 = \frac{1}{8}$，即 $p^2 = \frac{1}{2}$、$p = 1/\sqrt{2}$（它位于 $(0, 1]$ 内），之后递减。所以这是整个区间上的最大值：

$$Y_{\max} = r\left(1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cdot 2\right) = \tfrac{1}{4}r.$$

第 (iii) 部分

两个部分。 上边界 $r^3y = r^4 - x^4$ 就是第 (i) 部分中 $n = 4$ 的曲线，所以上半部（$y = 0$ 以上）就是第 (i) 部分中 $n = 4$ 的立体。下边界 $ry = -(r^2 - x^2)$ 是 $n = 2$ 的曲线 $ry = r^2 - x^2$ 关于 x 轴的反射，所以下半部就是倒转过来的 $n = 2$ 立体。两者在平面 $y = 0$ 上半径为 r 的圆形边缘相接。利用第 (i) 部分，即 $V = \pi n r^3/(n+2)$：

	体积	质心高度
上半部（$n = 4$）	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{4r}{10} = \frac{2}{5}r$
下半部（$n = 2$，经反射）	$\frac{1}{2}\pi r^3$	$-\frac{2r}{6} = -\frac{1}{3}r$

取力矩（与之前一样，假设密度均匀），

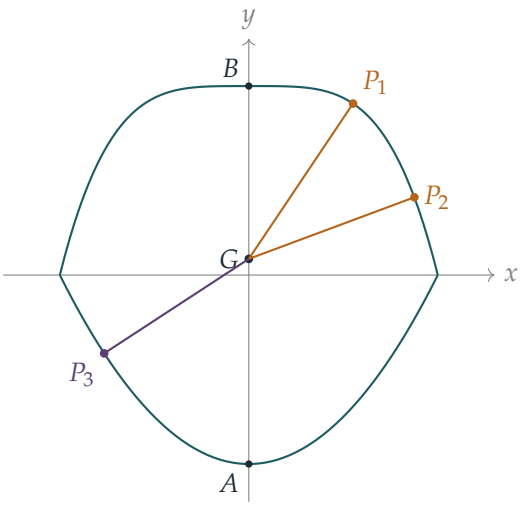
$$\bar{y} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}r - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}r}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{10}r}{\frac{7}{6}} = \frac{3r}{35},$$

所以 $G = \left(0, \frac{3}{35}r\right)$，略高于边缘。

平衡条件。

? **想一想** 为甚么接触点的法线必须通过 G?

当立体以单一点 P 靠在桌面上时，它只受两个力：铅垂地作用于 G 的重量，以及作用于 P 的桌面反作用力。两个力要平衡，必须大小相等、方向相反并且作用在同一直线上，所以 G 必须位于 P 的正上方。桌面就是 P 处的切平面（tangent plane），所以通过 P 的铅垂线就是立体在该点的法线：P 处的法线必须通过 G。反过来，若法线通过 G，立体便可以在该处静止，因为立体是凸（convex）的（轮廓 $y = r - x^4/r^3$ 是凹（concave）的，而 $y = (x^2 - r^2)/r$ 是凸的），所以它完全位于 P 处切平面的同一侧。旋转曲面（surface of revolution）的法线位于一个通过轴的平面内，所以我们只需考虑 xy 平面上的截面。由于 G 在轴上，我们需要找出与 y 轴相交于 $Y = \frac{3}{35}r$ 的法线。



在上表面接触。 由第 (ii) 部分取 $n=4$（而 $r(1-p^4)$ 是该点的高度），在 $\big(rp, r(1-p^4)\big)$ 处的法线与轴相交于 $r\big(1-p^4-\frac{1}{4}p^{-2}\big)$。令它等于 $\frac{3}{35}r$，再乘以 $140p^2$：

$$140p^2-140p^6-35=12p^2 \iff h(q):=140q^3-128q+35=0, \quad q=p^2.$$

由于 $h(0)=35>0$、$h(\frac{1}{2})=17.5-64+35=-11.5<0$ 及 $h(1)=47>0$，所以 h 有一个根 $q_1\in(0,\frac{1}{2})$ 及一个根 $q_2\in(\frac{1}{2},1)$，给出上表面上的两点 P_1,P_2，其中 $0<p_1<1/\sqrt{2}<p_2<1$。（这正是第 (ii) 部分所预示的：$\frac{3}{35}r$ 低于最大值 $\frac{1}{4}r$，所以这个值在最大值两侧各达到一次。）

在下表面接触。 对于 $n=2$ 的曲线，参数为 p 处的法线与轴相交于 $r(1-p^2-\frac{1}{2})=r(\frac{1}{2}-p^2)$；关于 x 轴反射后，下表面在 $\big(rp,-r(1-p^2)\big)$ 处的法线与轴相交于 $r(p^2-\frac{1}{2})$。令它等于 $\frac{3}{35}r$，得

$$p^2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{35}=\tfrac{41}{70}, \qquad p_3=\sqrt{41/70}\in(0,1),$$

这是第三点 P_3（由于我们所用的半截面上 $p>0$，所以取正根；图中显示的是它的镜像，由对称性可知两者等价）。

三个角互不相同且不为零。 当立体在 P 处静止时，向上的铅垂方向由 P 指向 G，即沿 P 处的向内法线。

- 在下表面的 P_3 处，向内法线 $(-2p_3,1)$（曲线的斜率为 $2p_3$）指向上方，与指向正 y 轴方向的 $\overrightarrow{AB}$ 成锐角 $\arctan(2p_3)$。
- 在上表面的 P_1 或 P_2 处，向内法线 $(-4p^3,-1)$ 指向下方，所以与 $\overrightarrow{AB}$ 所成的角是钝角 $180^\circ-\arctan(4p^3)$。

由于 $p_1 \neq p_2$ 且 $\arctan(4p^3)$ 严格递增，两个钝角并不相同，而且两者都与那个锐角不同。由于 $p_1, p_2, p_3 > 0$，三个角都不为零。因此立体可以在 $\overrightarrow{AB}$ 与向上铅垂方向成三个不同的非零角时处于平衡（equilibrium），此即所求。

（事实上平衡位置不止这些：立体亦可以靠边缘平衡，或以 B 点著地、$\overrightarrow{AB}$ 指向正下方而平衡。不过曲面上的这三个位置已足以回答题目。）

验算

- 第 (i) 部分取 $n = 2$，对高度为 r 的抛物面（paraboloid）得出 $\frac{1}{3}r$，这是标准结果：实心抛物面的质心位于由顶点到底面的三分之二处。当 $n \to \infty$ 时，立体变成高度为 r 的圆柱体，而 $\bar{y} \to \frac{1}{2}r$，结果正确。
- 在第 (ii) 部分中，当 $p = 1$（边缘）且 $n = 4$ 时得 $Y = -\frac{1}{4}r$；该处的斜率为 -4，所以法线的斜率为 $\frac{1}{4}$，在水平距离 r 内下降 $\frac{1}{4}r$。两者吻合。
- 取 $r = 1$，各根为 $p_1 \approx 0.552$、$p_2 \approx 0.876$、$p_3 \approx 0.765$，而各角约为 146.1°、110.4° 及 56.8°。以电脑搜索使 G 离桌面高度取驻值的倾角，在严格介乎 0° 与 180° 之间恰好找到这三个，另加边缘的位置（约 85.1°）。

常见错误

- 把下半部的质心放在 $+\frac{1}{3}r$：它是倒转过来的 $n = 2$ 立体，所以质心位于边缘之下。
- 使用圆盘（disc）体积 $\pi x^2\,\delta y$，而 x 仍要以 y 的 $\frac{2}{n}$ 次方表示：这方法可行，但圆柱壳法得出的是多项式积分。
- 求得关于 $q = p^2$ 的三次方程，却没有证明它有两个满足 $0 < p < 1$ 的根；在 $q = 0, \frac{1}{2}, 1$ 检查正负号即可解决。

STEP 之外

法线通过 G 这个条件，使物体滚动时 G 的高度取驻值，而这个高度就是势能（potential energy）。稳定（stable）位置是势能的极小值，不稳定位置则是极大值。光滑的凸体必定至少有两个平衡位置，而 2006 年发现的“Gömböc”是一个只有一个稳定位置和一个不稳定位置的凸形体。关于势能与稳定性的一般理论，可参阅 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。