详细解答

STEP III 2025，第 8 题

纯数学 · 以复数求三角函数之和

STEP III 2025，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

第 (i) 部分的恒等式（identity）其实是一条递推关系（recurrence）：它把 $z^{m+1}-z^{-(m+1)}$ 用低两级的同类表达式写出来，因此反复应用它，就能令一个和式逐项相消（telescope）。取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 后，每个 $z^k\pm z^{-k}$ 都变成 $2\cos k\theta$ 或 $2\mathrm{i}\sin k\theta$，代数运算于是化为三角恒等式（trigonometric identity）。至于数值部分，关键在于选取 θ，使 $\sin 2n\theta$ 等于 $\sin\theta$（或 $\cos\theta$），从而可以约去。

解答

第 (i) 部分

展开乘积，得

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^m+\frac{1}{z^m}\right)=z^{m+1}+z^{1-m}-z^{m-1}-z^{-(m+1)}.$$

加上 $z^{m-1}-z^{1-m}$，中间两项便互相抵消，剩下 $z^{m+1}-z^{-(m+1)}$，这正是所求的恒等式。

归纳法（*induction*）。当 $n=1$ 时，命题为 $z^2-z^{-2}=(z-z^{-1})(z+z^{-1})$，即平方差（difference of two squares），故成立。假设命题对某个 $n\geq 1$ 成立。在恒等式中取

$m=2n+1$（于是 $m+1=2n+2$，$m-1=2n$），

$$\begin{aligned} z^{2n+2}-\frac{1}{z^{2n+2}} &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right) \\ &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n+1}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right), \end{aligned}$$

这里用了归纳假设（inductive hypothesis），而多出来的一项正是 $r=n+1$ 的那一项。所以结果对 $n+1$ 成立，由归纳法知对所有 $n\geq 1$ 成立。

$z+\frac{1}{z}$ 的版本。同样地，

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{m}-\frac{1}{z^{m}}\right)=z^{m+1}-z^{1-m}+z^{m-1}-z^{-(m+1)},$$

所以这次要减去 $z^{m-1}-z^{1-m}$：

$$z^{m+1}-\frac{1}{z^{m+1}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{m}-\frac{1}{z^{m}}\right)-\left(z^{m-1}-\frac{1}{z^{m-1}}\right).$$

这个负号令我们每往下推一级时符号交替改变，因此我们断言

$$z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1}-\frac{1}{z^{2r-1}}\right).$$

当 $n=1$ 时，这同样是 $(z+z^{-1})(z-z^{-1})$。若命题对 n 成立，取 $m=2n+1$ 的恒等式给出

$$z^{2n+2}-\frac{1}{z^{2n+2}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n+1}-\frac{1}{z^{2n+1}}\right)-\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1}-\frac{1}{z^{2r-1}}\right)\right],$$

由于 $-(-1)^{n-r}=(-1)^{n+1-r}$，而第一项正是 $r=n+1$ 的那一项，其符号为 $(-1)^0=1$，所以方括号内恰好是 $\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{n+1-r}(z^{2r-1}-z^{-(2r-1)})$。归纳法至此完成。逐项写出来就是

$$z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n-1}-\frac{1}{z^{2n-1}}\right)-\left(z^{2n-3}-\frac{1}{z^{2n-3}}\right)+\cdots\pm\left(z-\frac{1}{z}\right)\right].$$

第 (ii) 部分

(a) 取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $z^k+z^{-k}=2\cos k\theta$，$z^k-z^{-k}=2\mathrm{i}\sin k\theta$。第 (i) 部分的第一个结果变成

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta=2\mathrm{i}\sin\theta\sum_{r=1}^{n}2\cos(2r-1)\theta,$$

两边除以 2i，得 $\sin 2n\theta=2\sin\theta\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)\theta$，即为所求。

(b) 取 $n=2$：$\sin 4\theta = 2\sin\theta(\cos\theta+\cos 3\theta)$。我们希望 $\sin 4\theta$ 等于 $\sin\theta$，而 $\theta=\frac{1}{5}\pi$ 正好做到，因为 $\sin\frac{4}{5}\pi=\sin(\pi-\frac{1}{5}\pi)=\sin\frac{1}{5}\pi$。由于 $\sin\frac{1}{5}\pi\neq 0$，可以两边除以它：

$$1=2(\cos\tfrac{1}{5}\pi+\cos\tfrac{3}{5}\pi).$$

又 $\cos\frac{3}{5}\pi=-\cos(\pi-\frac{3}{5}\pi)=-\cos\frac{2}{5}\pi$，所以 $\cos\frac{1}{5}\pi-\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{2}$，即 $\cos\frac{2}{5}\pi=\cos\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{2}$。

(c) 取 $n=7$ 及 $\theta=\frac{1}{15}\pi$，同样有 $\sin 14\theta=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\neq 0$，所以

$$\sum_{r=1}^{7}\cos\frac{(2r-1)\pi}{15}=\frac{1}{2}.$$

> **想一想** 这里的七个角都是 $\frac{1}{15}\pi$ 的奇数倍，但目标式中的却是偶数倍。怎样由前者过渡到后者?

对大于 $\frac{1}{2}\pi$ 的角使用 $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，并留意 $\cos\frac{5}{15}\pi=\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$ 及 $\cos\frac{3}{15}\pi=\cos\frac{1}{5}\pi$：

$$\cos\tfrac{9}{15}\pi=-\cos\tfrac{2}{5}\pi,\qquad \cos\tfrac{11}{15}\pi=-\cos\tfrac{4}{15}\pi,\qquad \cos\tfrac{13}{15}\pi=-\cos\tfrac{2}{15}\pi.$$

和式变成

$$\cos\tfrac{1}{15}\pi+\cos\tfrac{7}{15}\pi-\cos\tfrac{2}{15}\pi-\cos\tfrac{4}{15}\pi+\tfrac{1}{2}+(\cos\tfrac{1}{5}\pi-\cos\tfrac{2}{5}\pi)=\tfrac{1}{2}.$$

由 (b)，括号内的值是 $\frac{1}{2}$，所以

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi+\cos\tfrac{4}{15}\pi-\cos\tfrac{7}{15}\pi-\cos\tfrac{1}{15}\pi=\tfrac{1}{2}.$$

最后，$-\cos\frac{7}{15}\pi=\cos(\pi-\frac{7}{15}\pi)=\cos\frac{8}{15}\pi$，而 $-\cos\frac{1}{15}\pi=\cos(\pi+\frac{1}{15}\pi)=\cos\frac{16}{15}\pi$，得

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi+\cos\tfrac{4}{15}\pi+\cos\tfrac{8}{15}\pi+\cos\tfrac{16}{15}\pi=\tfrac{1}{2},$$

即为所求。

第 (iii) 部分

> **想一想** 目标式是 θ 的奇数倍角的正弦的交错和。第 (i) 部分哪一个结果正好产生这种形式?

是 $z+\frac{1}{z}$ 的版本。取 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，它变成

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta=2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\,2\mathrm{i}\sin(2r-1)\theta,$$

所以

$$\sin 2n\theta = 2\cos\theta \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r} \sin(2r-1)\theta.$$

取 $n = 3$：

$$\sin 6\theta = 2\cos\theta\,(\sin 5\theta - \sin 3\theta + \sin\theta).$$

现在我们希望 $\sin 6\theta = \cos\theta$，而 $\theta = \frac{1}{14}\pi$ 符合要求：$\sin\frac{6}{14}\pi = \cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{6}{14}\pi) = \cos\frac{1}{14}\pi$，且其值不为零。两边除以它，得

$$\sin\tfrac{1}{14}\pi - \sin\tfrac{3}{14}\pi + \sin\tfrac{5}{14}\pi = \tfrac{1}{2}.$$

验算

- 用简单的数值测试恒等式：取 $z = 2$、$n = 2$，得 $16 - \frac{1}{16} = \frac{255}{16}$，而 $(2 - \frac{1}{2})(2 + \frac{1}{2} + 8 + \frac{1}{8}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{85}{8} = \frac{255}{16}$，以及 $(2 + \frac{1}{2})(8 - \frac{1}{8} - 2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{2} \cdot \frac{51}{8} = \frac{255}{16}$。
- 以数值计算，$\cos\frac{2}{5}\pi = 0.309017\ldots$ 与 $\cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2} = 0.809017\ldots - 0.5$ 相符；这就是大家熟悉的 $\cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$、$\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$。
- 用计算机计算，(ii)(c) 和 (iii) 中的和式都等于 0.500000。

常见错误

- 在 $z + \frac{1}{z}$ 的递推关系中弄错符号：较低的一项是被减去的，所以和式符号交替，而最高的一项 $z^{2n-1} - z^{-(2n-1)}$ 必须带 $+$ 号。
- 除以 $\sin\theta$ 或 $\cos\theta$ 时，没有指出它在所选的角度下不为零。
- 在 (ii)(c) 中，忘记 $\cos\frac{5}{15}\pi = \frac{1}{2}$，或忘记需要用 (b) 来消去剩下的一对项。

STEP 之外

当 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 时，表达式 $z^k + z^{-k}$ 就是 $2\cos k\theta$；而像第 (i) 部分那样的递推关系，正是切比雪夫多项式（Chebyshev polynomials）所满足的关系——这些多项式把 $\cos k\theta$ 和 $\sin k\theta / \sin\theta$ 表示成 $\cos\theta$ 的多项式。(ii)(c) 和 (iii) 中那些漂亮的和式源自单位根（roots of unity）：角 $\frac{2}{15}\pi, \frac{4}{15}\pi, \frac{8}{15}\pi, \frac{16}{15}\pi$ 是由反复加倍产生的，这让我们初步窥见高斯（Gauss）周期（Gauss periods）与伽罗瓦理论（Galois theory）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是欣赏这种几何的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。