详细解答

STEP III 2025，第 7 题

纯数学 · 反正切函数

STEP III 2025，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

一切都取决于一个事实：$f(x)\,f(-x)=1$，因为 $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)=1$。再加上 $f(x)>0$，便可把 $g(x)+g(-x)$ 化成熟悉的 $\tan^{-1}t+\tan^{-1}(1/t)$。至于 (c)，$\tan\frac{1}{2}\theta$ 是半角正切（half-angle tangent），配合 $\tan\theta=1/x$，它可化简为 $f(x)$。一旦知道 g 与 k 在 $x>0$ 时相等，(e) 中的两个积分便可藉对称性联系起来。

解答

第 (i) 部分

当 $x\neq 0$ 时，有 $x^2=|x|^2$，所以

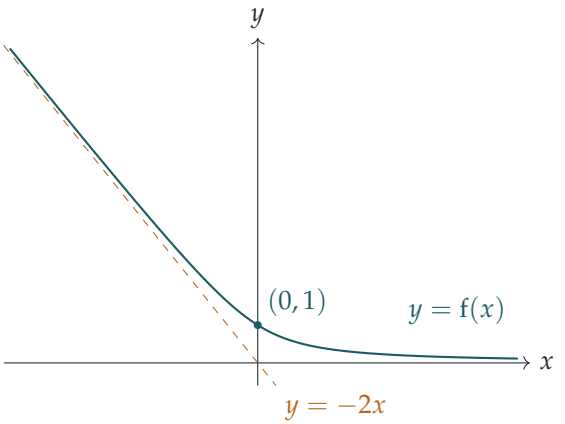
$$\sqrt{x^2+1}=|x|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2}=|x|\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\cdots\right)=|x|+\frac{1}{2|x|}-\frac{1}{8|x|^3}+\cdots,$$

这里用了二项级数（binomial series）；由于 $|x|$ 很大时 $1/x^2<1$，展开是成立的。略去 $|x|^{-3}$ 阶的项，便得 $\sqrt{x^2+1}\approx|x|+\dfrac{1}{2|x|}$，正如所求。

作图。先整理各项事实。

- 对所有 x，$f(x)>0$，因为 $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x$。此外 $f(0)=1$。
- $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1<0$，因为 $x<\sqrt{x^2+1}$，所以 f 是递减（decreasing）的。再者 $f''(x)=(x^2+1)^{-3/2}>0$，所以曲线是凸（convex）的。
- 当 $x\to+\infty$：$f(x)\approx x+\frac{1}{2x}-x=\frac{1}{2x}\to 0^+$，所以 x 轴是一条渐近线（asymptote）。

▶ 当 $x \to -\infty$：$|x| = -x$，所以 $\mathrm{f}(x) \approx -2x + \frac{1}{2|x|}$。直线 $y = -2x$ 是一条斜渐近线（oblique asymptote），而曲线位于它的稍上方。



第 (ii)(a) 部分

利用平方差（difference of two squares）展开，得

$$\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(-x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = (x^2+1) - x^2 = 1,$$

所以 $\mathrm{f}(-x) = 1/\mathrm{f}(x)$。设 $t = \mathrm{f}(x)$，由第 (i) 部分知它是正数。于是

$$\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \tan^{-1} t + \tan^{-1}\frac{1}{t}.$$

? **想一想** 为甚么 $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi$ 需要 $t > 0$?

设 $\alpha = \tan^{-1} t$。由于 $t > 0$，$\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$，所以 $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ 也在 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 内，而这区间位于 $\tan^{-1}$ 的值域之内。它的正切是 $\cot\alpha = 1/t$，所以 $\tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$。由此得 $\mathrm{g}(x) + \mathrm{g}(-x) = \frac{1}{2}\pi$。（若 $t < 0$，总和便会是 $-\frac{1}{2}\pi$，这正是 f 为正这一点重要的原因。）

第 (ii)(b) 部分

$\tan^{-1}$ 是奇函数（odd function），所以当 $x \neq 0$ 时，

$$\mathrm{k}(-x) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{x} = -\mathrm{k}(x),$$

即 $\mathrm{k}(x) + \mathrm{k}(-x) = 0$。

第 (ii)(c) 部分

设 $x > 0$ 及 $\theta = \tan^{-1}(1/x)$，则 $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 且 $\mathrm{k}(x) = \frac{1}{2}\theta$。取一个对边为 1、邻边为 x 的直角三角形，得 $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 及 $\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$。利用半角恒等式（half-angle identity）$\tan\frac{1}{2}\theta = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$（由 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ 及 $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ 得出），

$$\tan \mathrm{k}(x) = \frac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \sqrt{x^2+1} - x = \mathrm{f}(x) = \tan \mathrm{g}(x).$$

结果得证。

还可以说得更多。当 $x > 0$ 时，$\mathrm{k}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$。此外 $0 < \mathrm{f}(x) < \mathrm{f}(0) = 1$，所以 $\mathrm{g}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ 亦成立。由于 tan 在该区间上是一一对应（one-to-one）的，

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{g}(x) \quad \text{当} x > 0.$$

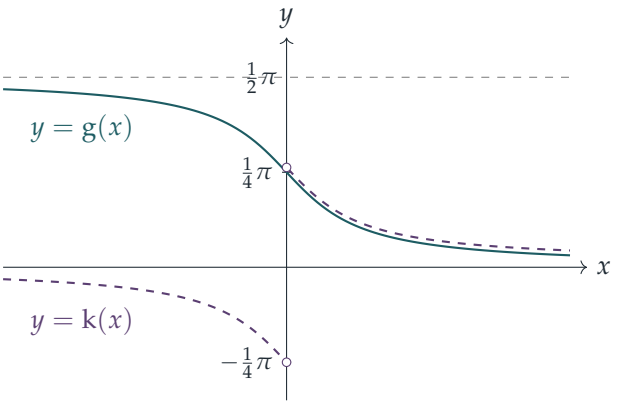
当 $x < 0$ 时，有 $-x > 0$，所以依次利用 (b)、上述结果及 (a)：

$$\mathrm{k}(x) = -\mathrm{k}(-x) = -\mathrm{g}(-x) = \mathrm{g}(x) - \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{当} x < 0.$$

第 (ii)(d) 部分

$\mathrm{g} = \tan^{-1} \circ \mathrm{f}$ 是递减的，因为 $\tan^{-1}$（递增）与 f（递减）都是单调（monotonic）的。当 $x \to -\infty$, $\mathrm{f} \to \infty$ 而 $\mathrm{g} \to \frac{1}{2}\pi$。当 $x \to +\infty$, $\mathrm{f} \to 0^+$ 而 $\mathrm{g} \to 0$。此外 $\mathrm{g}(0) = \tan^{-1} 1 = \frac{1}{4}\pi$，而由 (a) 可知图像关于 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ 具有旋转对称性（rotational symmetry）。

由 (c) 可知，当 $x > 0$ 时，k 的图像与 g 的相同，从 $\frac{1}{4}\pi$（不能取得）下降至趋向 0。当 $x < 0$ 时，它是 g 的图像向下平移 $\frac{1}{2}\pi$，从 0（当 $x \to -\infty$）下降，当 $x \to 0^-$ 时趋向 $-\frac{1}{4}\pi$。所以 k 是奇函数，并在 $x = 0$ 处（该处无定义）跳跃 $\frac{1}{2}\pi$。



（当 $x > 0$ 时两条曲线重合。该处把虚线曲线画得比实线稍高，只是为了让两者都看得见。）

第 (ii)(e) 部分

当 $x>0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\dfrac{-1/x^2}{1+1/x^2}=-\dfrac{1}{1+x^2}$。使用分部积分（integration by parts），对 $\tan^{-1}(1/x)$ 求导，对 1 积分，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\Big[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\Big]_0^1+\tfrac{1}{2}\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{4}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

在下限处，当 $x\to 0^+$ 时 $x\tan^{-1}(1/x)\to 0$，因为 $\tan^{-1}(1/x)$ 一直小于 $\frac{1}{2}\pi$。（被积函数有界，所以这个积分完全是正常积分。）

由此。由 (c)，当 $-1\le x<0$ 时 $\mathrm{g}(x)=\mathrm{k}(x)+\frac{1}{2}\pi$。由 (b)，k 是奇函数，所以 $\int_{-1}^0\mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1\mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x$。因此

$$\int_{-1}^0\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}\pi-\Big(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\ln 2\Big)=\frac{3\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.$$

验算

- 在 $[-1,0]$ 上，g 由 $\mathrm{g}(-1)=\tan^{-1}(\sqrt{2}+1)=\frac{3}{8}\pi\approx 1.178$ 递减至 $\frac{1}{4}\pi\approx 0.785$，所以积分必定介乎这两个值之间。我们的答案是 $\frac{3}{8}\pi-\frac{1}{4}\ln 2\approx 1.0048$，而数值积分（numerical quadrature）在十位小数内给出相同结果。同样地，$\int_0^1\mathrm{k}\,\mathrm{d}x\approx 0.56599$。
- 求导得 $\mathrm{g}'(x)=-\dfrac{1}{2(1+x^2)}$，所以其实 $\mathrm{g}(x)=\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\tan^{-1}x$。这条公式令 (a) 一目了然，而直接对它积分亦可重现 (e) 的答案。
- 在 $x=1$：$\mathrm{f}(1)=\sqrt{2}-1=\tan\frac{1}{8}\pi$，而 $\mathrm{k}(1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi=\frac{1}{8}\pi$，与 (c) 的预测一致。

常见错误

- 对所有很大的 $|x|$ 都写 $\sqrt{x^2+1}\approx x+\frac{1}{2x}$。对负数 x 而言这个式子符号错误，而且会掩盖渐近线 $y=-2x$。
- 从 (c) 推断 $\mathrm{k}=\mathrm{g}$ 处处成立。正切相等只能推出角度在相差 π 的倍数下相等，而当 $x<0$ 时两个函数相差 $\frac{1}{2}\pi$。
- 在分部积分中忘记论证 $x\tan^{-1}(1/x)$ 在 0 处的极限。

STEP 之外

函数 f 就是 $e^{-\sinh^{-1}x}$，因为 $\sinh^{-1}x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$。它的倒数性质 $f(-x) = 1/f(x)$ 不过是 $\sinh^{-1}$ 为奇函数这一点。(c) 中的陷阱——正切相等并不迫使角度相等——正是反函数分支（branch）问题的实变量版本。这个问题在复对数（complex logarithm）与辐角（argument）中会以更严重的形式再次出现。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是欣赏这一点的绝佳读物，而 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）则仔细处理了极限与反常积分（improper integral）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。