详细解答

STEP III 2025，第 6 题

纯数学 · 根的对称函数

STEP III 2025，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

关于 $a+b+c$、$a^2+b^2+c^2$ 和 $a^3+b^3+c^3$ 的条件，实际上就是关于初等对称函数（elementary symmetric functions）$a+b+c$、$ab+bc+ca$ 和 abc 的条件。一旦转换过来，在 (i) 中这些数会成为一个非常简单的多项式（polynomial）的根；在 (ii) 和 (iii) 中则由一个经典的因式分解（factorisation）包办所有工作。最后一部分就是把同样的代数倒过来运用。

解答

第 (i) 部分

将 $a+b+c=0$ 两边平方，得

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca),$$

所以同样有 $ab+bc+ca=0$。

*并非全是实数。*若 a、b 和 c 全是实数，则 a^2、b^2、c^2 是总和为 0 的非负实数，迫使 $a=b=c=0$。这与这些数非零矛盾，所以它们不可能全是实数。

*模相等。*设 $p=abc$，它非零。由于 $a+b+c=0$ 且 $ab+bc+ca=0$，

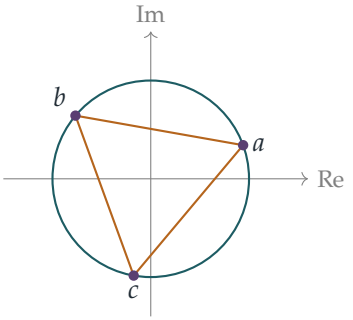
$$(z-a)(z-b)(z-c)=z^3-(a+b+c)z^2+(ab+bc+ca)z-abc=z^3-p.$$

所以 a、b、c 每一个都是 $z^3=p$ 的根，即

$$a^3=b^3=c^3=p.$$

取模（modulus），得 $|a|^3 = |b|^3 = |c|^3 = |p|$；由于模是非负实数，$|a| = |b| = |c| = |p|^{1/3}$。所以 a、b 和 c 的模全都相同，得证。

事实上，a、b、c 正是 p 的三个立方根（cube roots），它们位于一个以原点为中心的等边三角形（equilateral triangle）的顶点上。



第 (ii) 部分

设 $a + b + c = 0$。则 $c = -(a + b)$，且

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

若同时有 $a^3 + b^3 + c^3 = 0$，则 $abc = 0$，所以其中至少一个数为零。因此不存在三个同时具备这两个性质的非零复数。

第 (iii) 部分

这次有用的恒等式（identity）是

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a),$$

可以通过展开来验证：两边的 a^2b、ab^2 等项各出现三次，而 abc 出现六次。

现在 $d = -(a + b + c)$，所以 $d^3 = -(a + b + c)^3$，且

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = -3(a + b)(b + c)(c + a).$$

想一想 为甚么一个乘积等于零，能告诉我们关于模的任何信息？

若干复数的乘积为零，当且仅当其中一个因子为零。所以 $a + b$、$b + c$、$c + a$ 之中有一个等于零；不妨设 $a + b = 0$（其他情况只需重新标记字母，做法相同）。于是 $b = -a$，所以 $|b| = |a|$。因此四个数中至少有两个模相同。

（这里并没有用到 $d \neq 0$ 或这些数非零；结论其实就是这四个数可分成两对互为相反数的数，例如 $a, -a, c, -c$。）

第 (iv) 部分

取 $c=1$、$d=-2$、$e=3$，有

$$c+d+e=2, \qquad c^3+d^3+e^3=1-8+27=20,$$

所以我们需要实数 a、b 使得

$$a+b=-2, \qquad a^3+b^3=-20.$$

利用 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$，第二个条件变成

$$-20=-8+6ab \quad \Longrightarrow \quad ab=-2.$$

所以 a 和 b 是 $t^2+2t-2=0$ 的根，即

$$a=-1+\sqrt{3}, \qquad b=-1-\sqrt{3},$$

由于判别式(discriminant)$4+8=12$ 为正,它们都是实数。它们的绝对值分别是 $\sqrt{3}-1\approx 0.73$ 和 $\sqrt{3}+1\approx 2.73$，两者都不等于 1、2 或 3（两者都是无理数（irrational））。所以

$$-1+\sqrt{3}, \quad -1-\sqrt{3}, \quad 1, \quad -2, \quad 3$$

是五个绝对值各不相同的实数，总和为 0，而它们的立方和也是 0。

验算

- 在 (i) 中, 1 的立方根 1、ω、ω^2 满足 $1+\omega+\omega^2=0$ 及 $1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0$: 模全是 1，且并非全是实数，与预期相符。
- 在 (iii) 中，试取 $a=2$、$b=-2$、$c=\mathrm{i}$、$d=-\mathrm{i}$：两个和都等于零，而这些数确实两两配成相反数。
- 在 (iv) 中，以数值计算得 $0.7320-2.7320+1-2+3=0$ 及 $0.3923-20.3923+1-8+27=0$，其中用到 $(\sqrt{3}-1)^3=6\sqrt{3}-10$ 和 $(-1-\sqrt{3})^3=-6\sqrt{3}-10$。

常见错误

- 在 (i) 中，通过“取立方根”由 $a^3=b^3$ 推出 $|a|=|b|$：a 和 b 不一定相等，但它们的模相等，因为模是非负实数。
- 在 (iii) 中，忘记说明为甚么 $(a+b)(b+c)(c+a)=0$ 迫使其中一个因子为零（因为 $\mathbb{C}$ 中没有零因子（zero divisors））。
- 在 (iv) 中，没有检查 a 和 b 的绝对值与 1、2、3 不同，以及两者彼此不同。

STEP 之外

每个多变量对称多项式（symmetric polynomial）都可以用初等对称多项式表示，而牛顿（Newton）恒等式（Newton's identities）则明确给出它们与幂和（power sums）$a^k + b^k + c^k + \ldots$ 之间的联系；这正是这里的条件能把这些数限制得如此紧的原因。一个近亲是 Prouhet–Tarry–Escott 问题：找出两组不同的整数，使它们的一次方、二次方、...、k 次方之和全部相等。这个问题至今仍部分未解决。关于多项式及其根的代数，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。