详细解答

# STEP III 2025，第 5 题

纯数学 · 三维向量

**STEP III 2025，第 5 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

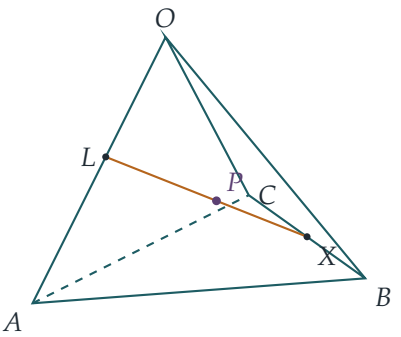
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

## 关键思路

由于 $O$ 位于不共线（non-collinear）三点 $A$、$B$、$C$ 所在平面的上方，向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 是线性独立（linearly independent）的，因此在任何以它们表示的向量方程中，我们都可以*比较系数*（compare coefficients）。题中每一点都可以先用未知参数写出，再通过对应系数求得。点在平面上方的高度只是系数的倍数，因此处理“水平”这个条件就变得十分容易。

## 解答

由于 $O$ 不在平面 $ABC$ 上，$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 之中没有任何一个是其余两个的组合（例如若 $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$，则 $O$、$A$、$B$、$C$ 便会共面（coplanar））。所以 $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$ 必然推出 $x = x'$、$y = y'$、$z = z'$。另外亦须留意 $k > 0$。



**第 (i) 部分**

设 $\overrightarrow{OL} = \lambda\mathbf{a}$ 及 $\overrightarrow{OX} = (1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$。由于 $P$ 在 $LX$ 上，存在某个 $s$ 使得

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\lambda\,\mathbf{a} + s(1-t)\,\mathbf{b} + st\,\mathbf{c}.$$

与 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ 比较：

$$(1-s)\lambda = \alpha, \qquad s(1-t) = \beta, \qquad st = \gamma.$$

将后两式相加得 $s = \beta + \gamma$，于是 $t = \gamma/(\beta+\gamma)$，所以

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta + \gamma}.$$

最后 $1 - s = 1 - \beta - \gamma = k + \alpha$，这是正数，所以

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\alpha}{1-s}\,\mathbf{a} = \frac{\alpha}{k+\alpha}\,\mathbf{a},$$

正如所求。（各系数都是被唯一确定的，所以 $L$ 和 $X$ 是唯一的；又由于 $0 < s < 1$ 及 $0 < t < 1$，$P$ 严格位于 $L$ 与 $X$ 之间，而 $X$ 严格位于 $B$ 与 $C$ 之间。）

**第 (ii) 部分**

把字母轮换（$\mathbf{a} \to \mathbf{b} \to \mathbf{c} \to \mathbf{a}$，$\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$），以同样的论证可得

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\beta}{k+\beta}\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\gamma}{k+\gamma}\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{\gamma\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a}}{\gamma+\alpha}, \quad \overrightarrow{OZ} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha+\beta}.$$

? **想一想** 怎样判断一个经过三个给定点的平面是否水平?

当且仅当（if and only if）三点处于同一高度时，该平面才是水平的。设 $O$ 位于平面 $ABC$ 上方高度 $h > 0$ 处。那么 $A$、$B$、$C$ 各自都在 $O$ 下方铅垂距离 $h$ 处，因此 $OA$ 上的点 $\mu\mathbf{a}$ 位于 $O$ 下方距离 $\mu h$ 处，$OB$ 和 $OC$ 上的点亦同理。所以 $L$、$M$、$N$（它们位于三条不同的棱上且不在 $O$ 处，故不共线）分别位于 $O$ 下方深度

$$\frac{\alpha h}{k+\alpha}, \qquad \frac{\beta h}{k+\beta}, \qquad \frac{\gamma h}{k+\gamma}$$

处。现在

$$\frac{\alpha}{k+\alpha} = \frac{\beta}{k+\beta} \iff \alpha k + \alpha\beta = \beta k + \alpha\beta \iff k(\alpha - \beta) = 0 \iff \alpha = \beta,$$

这里用到 $k > 0$。其余各对同理，所以

$$\text{平面}LMN \text{ 是水平的} \iff \alpha = \beta = \gamma.$$

接着，$OP$ 与平面 $ABC$ 相交于何处？点 $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$ 位于该平面上，当且仅当 $x+y+z=1$（此时它等于 $\mathbf{a}+y(\mathbf{b}-\mathbf{a})+z(\mathbf{c}-\mathbf{a})$，而平面上每一点都具有这个形式）。点 $\mu\overrightarrow{OP}$ 的系数之和为 $\mu(\alpha+\beta+\gamma)$，所以直线 $OP$ 与该平面相交于

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

比较系数可知，它等于 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ 当且仅当

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1}{3},$$

即当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma$。两个条件都等价于 $\alpha=\beta=\gamma$，所以平面 $LMN$ 是水平的，当且仅当 $OP$ 与平面 $ABC$ 相交于三角形 $ABC$ 的形心（centroid）$G$。至此完成题目要求的“证明”。

在这情况下 $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$，$Y$ 和 $Z$ 亦同理：点 $X$、$Y$、$Z$ 分别是 $BC$、$CA$ 和 $AB$ 的**中点**。

### 第 (iii) 部分

我们可以写成

$$\overrightarrow{OP}=k\,\mathbf{0}+\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},\qquad k+\alpha+\beta+\gamma=1,$$

而正正因为 $\alpha+\beta+\gamma<1$，四个权重 $k,\alpha,\beta,\gamma$ 全都是正数。所以 $P$ 是 $O$、$A$、$B$、$C$ 以严格正权重所作的加权平均（weighted average），这表示 $P$ 严格位于四面体（tetrahedron）$OABC$ 的**内部**。

换个说法：单凭 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 为正，就已把 $P$ 置于以 $O$ 为顶点、由棱 $OA$、$OB$、$OC$ 张成的无限三面锥之内。$P$ 在 $O$ 下方的深度是 $(\alpha+\beta+\gamma)h$，所以条件 $\alpha+\beta+\gamma<1$ 表示 $P$ 位于平面 $ABC$ 上方，与 $O$ 在同一侧。（若和等于 1，$P$ 便在面 $ABC$ 上；若大于 1，则在其另一侧。）

## 验算

- 取 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{4}$，于是 $k=\frac{1}{4}$：那么 $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\mathbf{a}$、$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\mathbf{b}$、$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\mathbf{c}$，而 $LMN$ 显然就是水平的中截面，与第 (ii) 部分的预测一致。
- 当 $k\to 0$（即 $P$ 趋近面 $ABC$）时，$\overrightarrow{OL}\to\mathbf{a}$：$L$ 向下移至 $A$，这是合理的，因为此时 $L$、$P$、$X$ 全都位于平面 $ABC$ 上。
- 以电脑对 2000 个随机四面体及随机的 $\alpha,\beta,\gamma$ 进行验算，确认 $P$ 在 $LX$ 上（残差约为 $10^{-15}$），并且 $LMN$ 是水平的恰好当 $G$ 是形心之时。

## 常见错误

- 比较系数时没有说明为何可以这样做：这需要 **a**、**b**、**c** 线性独立，而这正是用到“$O$ 位于平面上方”的地方。
- 忘记在 $k(\alpha-\beta)=0$ 中消去 $k$ 需要 $k>0$。
- 只证明了“当且仅当”的其中一个方向。

## STEP 之外

数组 $(k,\alpha,\beta,\gamma)$ 就是 $P$ 相对于四面体 $OABC$ 的重心坐标（barycentric coordinates）：一点位于内部，当且仅当所有坐标皆为正数；位于某个面上，则恰有一个坐标为零。它们是仿射几何（affine geometry）的自然坐标，在线性代数（linear algebra）中（仿射组合与凸包（convex hulls））以及电脑图像学中都会再次出现——在电脑图像学里，三角形正是以重心权重插值来著色的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）是了解线性独立和坐标如何以这种方式运用的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。