详细解答

STEP III 2025，第 4 题

纯数学 · 曲线的变换

STEP III 2025，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

设平面上的映射 T 有逆映射（inverse）。那么曲线 $f(T^{-1}(x,y))=0$ 就是曲线 $f(x,y)=0$ 在 T 之下的像，因为一点在新曲线上，当且仅当 T^{-1} 把它送到旧曲线上。第 (i) 部分就旋转（rotation）的情况证明这一点。第 (ii) 部分对反射（reflection）做同样的事，此时 $T^{-1}=T$。在第 (iii) 部分，我们留意到代换（substitution）$u=x-2y$ 把方程变成 $y=\sin x$ 的一个水平剪切（horizontal shear），再用参数化（parametrisation）便能求出切线（tangent），完全免去隐函数微分（implicit differentiation）的麻烦。

解答

第 (i) 部分

把矩阵乘积展开，得

$$x_2=\frac{x_1-y_1}{\sqrt{2}},\qquad y_2=\frac{x_1+y_1}{\sqrt{2}}.$$

把 $(x,y)=(x_2,y_2)$ 代入 G_2 方程中的两个括号：

$$\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{y_2}{\sqrt{2}}=\frac{(x_1-y_1)+(x_1+y_1)}{2}=x_1,$$
$$-\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\frac{y_2}{\sqrt{2}}=\frac{-(x_1-y_1)+(x_1+y_1)}{2}=y_1.$$

所以 G_2 的方程左边在 (x_2,y_2) 的值是 $\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}$。由于 (x_1,y_1) 在 G_1 上，这个值等于 1。因此 (x_2,y_2) 在 G_2 上。

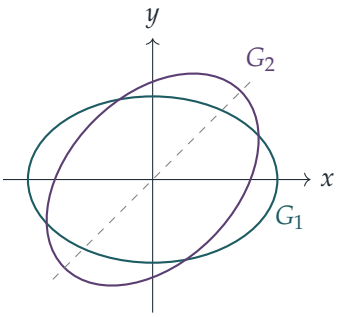
至于旋转，留意 $\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$，所以矩阵是

$$R = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix},$$

即绕原点逆时针旋转 45°。我们刚刚证明了 R 把 G_1 上每一点都映射到 G_2 上。要证明 G_2 恰好就是旋转后的曲线，我们还需要 G_2 上每一点都来自 G_1。取 G_2 上任意一点 (x, y)，并设

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}},$$

这就是 $R^{-1}(x, y)$（反方向转回 45°）。G_2 的方程正好说明 $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$，所以 $(x_1, y_1) \in G_1$，而且 $R(x_1, y_1) = (x, y)$。因此 $G_2 = R(G_1)$：椭圆（ellipse）G_2 就是把 G_1 绕原点逆时针旋转 45° 所得的曲线。



第 (ii)(a) 部分

把该矩阵记作 M。点 (x, y) 是不变点（invariant point），当且仅当 $M\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$，即

$$-0.6x + 0.8y = x, \qquad 0.8x + 0.6y = y.$$

第一式给出 $0.8y = 1.6x$，所以 $y = 2x$；第二式给出 $0.8x = 0.4y$，两者其实一样。所以不变点所成的直线（即镜线（mirror line））是

$$y = 2x.$$

第 (ii)(b) 部分

记 $(X, Y) = M(x, y) = (-0.6x + 0.8y,\ 0.8x + 0.6y)$。第二条方程正是

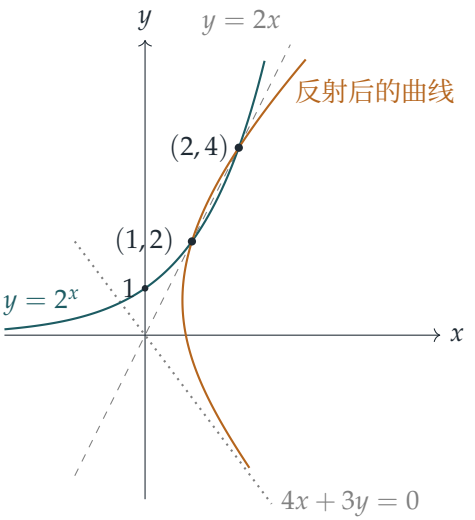
$$Y = 2^X.$$

所以 (x, y) 在第二个图像上，当且仅当 $M(x, y)$ 在 $y = 2^x$ 上。反射会抵销自己（$M^2 = I$，可以自行把乘积展开验证），所以 $(x, y) = M(X, Y)$。这又是第 (i) 部分的论证：第二个图像就是 $y = 2^x$ 关于直线 $y = 2x$ 的反射。

想一想 反射后曲线的渐近线去了哪里？曲线又朝哪个方向伸向无穷远？

把 $y = 2^x$ 的特征逐一反射。

- 渐近线（*asymptote*）。当 $x \to -\infty$，$y = 2^x$ 趋近 x 轴。方向 $(1,0)$ 反射成 $M(1,0) = (-0.6, 0.8)$，所以 x 轴反射成直线 $4x + 3y = 0$，即 $y = -\frac{4}{3}x$。等价地说，$Y = 0.8x + 0.6y = 2^X > 0$，所以反射后的曲线严格位于 $4x + 3y > 0$ 那一侧，并在 $X \to -\infty$ 时趋近 $4x + 3y = 0$。在远处，$y = 2^x$ 上的点大约是 $(X, 0)$，其中 X 是很大的负数，这些点反射后大约是 $(-0.6X, 0.8X)$。所以反射后的曲线在第四象限趋近其渐近线，此时 $x \to +\infty$ 而 $y \to -\infty$。
- 镜线上的点。反射保持 $y = 2x$ 上每一点不动。而 $2^x = 2x$ 在 $x = 1$ 和 $x = 2$ 成立（也只在这两处成立，因为 $2^x - 2x$ 是凸函数（convex））。所以两条曲线都经过 $(1,2)$ 和 $(2,4)$，并在那里相交。用电脑沿 $y = 2^x$ 搜索，找不到其他公共点。
- 其他点。$(0,1)$ 反射成 $(0.8, 0.6)$。
- 最左点。反射后的曲线是 $\left(-0.6t + 0.8 \cdot 2^t,\ 0.8t + 0.6 \cdot 2^t\right)$。它的 x 坐标在 $0.8 \cdot 2^t \ln 2 = 0.6$ 时最小，该点大约是 $(0.80, 0.74)$。那里的切线是铅垂的，所以反射后的曲线并不是 x 的函数的图像。
- 增长。当 $X \to +\infty$，点 $(X, 2^X)$ 反射后大约是 $2^X(0.8, 0.6)$。所以曲线向右上方伸展，方向大致是斜率 $\frac{3}{4}$。



第 (iii) 部分

$0 \le x \le 2\pi$ 范围内的图像 $y = \sin x$ 就是大家熟悉的一个完整波形。

对于 $y=\sin(x-2y)$，设 $u=x-2y$。点 (x,y) 在曲线上，当且仅当 $y=\sin u$，而此时 $x=u+2y$。所以该曲线恰好是

$$x=u+2\sin u,\qquad y=\sin u.$$

这就是把 $y=\sin x$ 上每一点向横方向推移其高度的两倍：即水平剪切 $(u,v)\mapsto(u+2v,v)$。

*哪些 u 给出 $0\le x\le 2\pi$？*设 $x(u)=u+2\sin u$。那么 $x(-u)=-x(u)$ 而且 $x(u+2\pi)=x(u)+2\pi$。由于 $x'(u)=1+2\cos u$，函数 $x(u)$ 在 $[0,\frac{2\pi}{3}]$ 上由 0 递增至 $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\approx 3.83$，然后在 $[\frac{2\pi}{3},\pi]$ 上递减至 π。所以当 $0<u\le\pi$ 时它落在 $(0,2\pi)$ 内，而在 $[\pi,2\pi]$ 上，对称性 $x(2\pi-u)=2\pi-x(u)$ 保证它落在 $(0,2\pi]$ 内。对于 $u>2\pi$，由归纳法（induction）得 $x(u)=x(u-2\pi)+2\pi>2\pi$；对于 $u<0$，由奇函数（odd function）的性质得 $x(u)<0$。所以当 u 由 0 走到 2π 时，所需的那段曲线恰好被描出一次，由 $(0,0)$ 走到 $(2\pi,0)$。

*切线。*沿着曲线，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}=1+2\cos u,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\cos u,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos u}{1+2\cos u}.$$

这两个导数不会同时为零，因为 $\cos u=0$ 时 $1+2\cos u=1$。

- 水平切线出现在 $\cos u=0$ 之处，即 $u=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$：

$$\left(\tfrac{\pi}{2}+2,\ 1\right)\quad 及\quad \left(\tfrac{3\pi}{2}-2,\ -1\right).$$

- 铅垂切线出现在 $\cos u=-\frac{1}{2}$ 之处，即 $u=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}$：

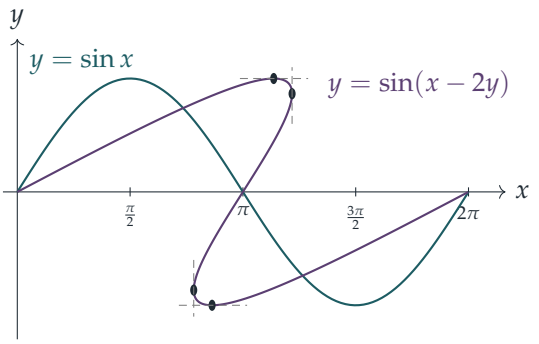
$$\left(\tfrac{2\pi}{3}+\sqrt{3},\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\quad 及\quad \left(\tfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3},\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

它们的数值大约是 $(3.57,1)$、$(2.71,-1)$、$(3.83,0.87)$ 和 $(2.46,-0.87)$。

想一想 顶部的水平切线位于 $x\approx 3.57$，但曲线之后仍然到达 $x\approx 3.83$。曲线实际上是甚么样子的？

让 u 由 0 走到 2π。曲线以斜率 $\frac{1}{3}$ 离开原点（代入 $u=0$），比 $y=\sin x$ 平缓。它上升至最高点 $(\frac{\pi}{2}+2,1)$，然后向右下方移动，到达位于 $(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的铅垂切线。接着它向左弯回，以斜率 $\frac{-1}{-1}=1$ 经过 $(\pi,0)$。它到达位于 $(\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2})$ 的第二条铅垂切线，再向右转经过最低点 $(\frac{3\pi}{2}-2,-1)$，然后上升至 $(2\pi,0)$。这条曲线像一个正在卷起的浪头般向前悬垂。在 $x\approx 2.46$ 与 $x\approx 3.83$ 之间，每个 x 对应三个 y 值。整幅图关于 $(\pi,0)$ 有半周旋转对称（half-turn symmetry）。

顺带一提，两个图像在 $\sin x=\sin(x-2\sin x)$ 之处相交。要么 $\sin x=0$，得 $x=0,\pi,2\pi$；要么 $x-\sin x=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，得 $x\approx 2.31$ 和 $x\approx 3.97$。



验算

- 第 (i) 部分：取 G_1 的顶点 $(3,0)$。它被映射到 $(\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}})$，而 G_2 方程中的两个括号分别给出 3 和 0，所以左边等于 1。
- 第 (ii) 部分：$M\binom{1}{2}=\binom{-0.6+1.6}{0.8+1.2}=\binom{1}{2}$，正如不变点应有的结果。点 $(1,2)$ 也满足第二条方程：$0.8+1.2=2=2^{-0.6+1.6}$。
- 第 (iii) 部分：在 $(\frac{\pi}{2}+2,1)$，得 $x-2y=\frac{\pi}{2}$，而 $\sin\frac{\pi}{2}=1=y$。同样，$(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 给出 $x-2y=\frac{2\pi}{3}$，而 $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。隐函数微分给出 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos(x-2y)}{1+2\cos(x-2y)}$。它的分子在第一点为 0，分母在第二点为 0。

常见错误

- 只证明了 G_1 被映射到 G_2 之内。要说 G_2 就是旋转后的曲线，还需要证明 G_2 上每一点都来自 G_1，这就要用到逆映射。
- 把 $y=\sin(x-2y)$ 当作 x 的函数，结果把曲线画成一个没有悬垂部分的普通波形。铅垂切线正是曲线向回折的地方。
- 忘记反射后的指数曲线有一条斜渐近线（oblique asymptote）$4x+3y=0$，而且整条曲线完全位于它的一侧。

STEP 之外

这道题背后的原理是：把可逆映射（invertible map）T 作用于曲线 $f(x,y)=0$，得到的是曲线 $f\big(T^{-1}(x,y)\big)=0$。在大学一年级的线性代数（linear algebra）课程中，这会发展成研究二次型（quadratic form）在基变换（change of basis）之下如何改变。旋转坐标轴以消去圆锥曲线（conic）中的 xy 项，正是对称矩阵（symmetric matrix）对角化（diagonalisation）在二维的情况。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导

论》）以非常易读的方式讲解旋转、反射及其特征向量（eigenvector）（第 (ii)(a) 部分中的不变直线就是一个特征值（eigenvalue）为 1 的特征向量）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。