详细解答

STEP III 2025，第 3 题

纯数学 • 平均值不等式

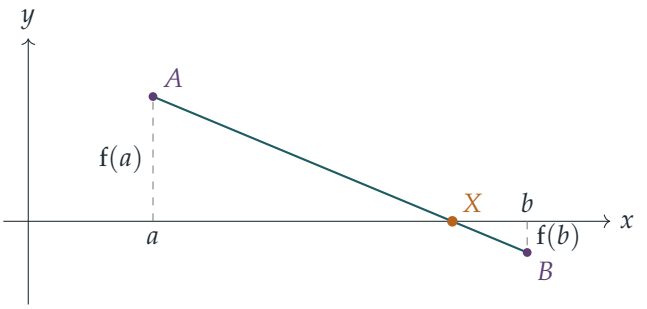
STEP III 2025，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

由于 A 位于轴的上方而 B 位于轴的下方，交点 X 会把 AB 按两个高度之比 $\mathrm{f}(a) : \mathrm{f}(b)$ 分割。因此 m 是 a 与 b 的加权平均（*weighted average*），而接下来的一切，都是关于这些权重如何随 f 改变。一旦把 m 写成单一比值 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$ 的函数，比较两个不同的 f 就变成比较两个数。



解答

第 (i) 部分

由 A、其垂足 $(a,0)$ 及 X 组成的三角形，与由 B、其垂足 $(b,0)$ 及 X 组成的三角形，是相似三角形（similar triangles）（在 X 处的对顶角相等，在垂足处均为直角）。因此

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} \quad \Longrightarrow \quad m\,\mathrm{f}(b) - a\,\mathrm{f}(b) = b\,\mathrm{f}(a) - m\,\mathrm{f}(a),$$

所以

$$\boxed{m = \frac{a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(b)}}.$$

（由于 $\mathrm{f} > 0$，分母为正；把 $y = 0$ 代入直线方程 $y - \mathrm{f}(a) = -\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{b-a}(x - a)$，亦可得出相同答案。）

值得设 $r = \mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b) > 0$，把分子和分母同时除以 $\mathrm{f}(b)$，将结果改写为：

$$m = \frac{a + br}{1 + r} = b - \frac{b - a}{1 + r}. \qquad (*)$$

第 (ii) 部分

当 $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$ 时，

$$m = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab},$$

此即所求。

至于第二个目标，分子 $a^{n+1} + b^{n+1}$ 应该是由 $a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)$ 通分后得来，这提示 $\mathrm{f}(b)$ 应该表现得像 b^{-n}。试取 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$，它在 $x > 0$ 时为正：

$$m = \frac{ab^{-n} + ba^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{b^n + a^n},$$

这里把分子和分母同时乘以 $a^n b^n$。所以 $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$ 符合要求（它的任何正常数倍亦然，因为 m 只取决于比值 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$）。留意 $n = -\frac{1}{2}$ 正好还原第一个结果。

第 (iii) 部分

设 $r_1 = \mathrm{g}_1(a)/\mathrm{g}_1(b)$ 及 $r_2 = \mathrm{g}_2(a)/\mathrm{g}_2(b)$，两者均为正数。由 $(*)$，$M_i = b - \dfrac{b - a}{1 + r_i}$。由于 $b - a > 0$，当 $r > 0$ 时，式子 $b - \frac{b-a}{1+r}$ 对 r 严格递增（strictly increasing），所以只需证明 $r_1 > r_2$。

> ? **想一想** 一个关于函数 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$ 的条件，怎样转化为关于 r_1 和 r_2 的条件?

记 $h = \mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$。于是

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathrm{g}_1(a)\,\mathrm{g}_2(b)}{\mathrm{g}_1(b)\,\mathrm{g}_2(a)} = \frac{h(a)}{h(b)} > 1,$$

因为 h 递减（decreasing）且 $a < b$，故 $h(a) > h(b) > 0$。由于 $r_2 > 0$，可得 $r_1 > r_2$，从而 $M_1 > M_2$。

由此。我们需要三个函数，使其对应的 m 值分别是这三个平均值。

- $f(x) = 1$（常数）给出 $m = \dfrac{a+b}{2}$。
- 由第 (ii) 部分，$f(x) = \sqrt{x}$ 给出 $m = \sqrt{ab}$。
- $f(x) = x$ 给出 $m = \dfrac{ab+ba}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$。

现在把刚证明的结果应用两次。取 $g_1 = 1$、$g_2 = \sqrt{x}$，比值 $g_1/g_2 = x^{-1/2}$ 在 $x > 0$ 时递减，所以 $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$。取 $g_1 = \sqrt{x}$、$g_2 = x$，比值同样是 $x^{-1/2}$，亦为递减，所以 $\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$。合起来，

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

第 (iv) 部分

曲线经过 A 和 B，所以

$$f(a) = p(c-a)^3, \qquad -f(b) = p(c-b)^3, \text{ 即 } f(b) = p(b-c)^3.$$

由于 $f(b) > 0$，我们有 $p \neq 0$ 及 $b \neq c$，因此可以相除：

$$\frac{f(a)}{f(b)} = \left(\frac{c-a}{b-c}\right)^3.$$

每个实数都恰好有一个实立方根（cube root），所以取立方根是可逆的，故

$$\frac{c-a}{b-c} = \left(\frac{f(a)}{f(b)}\right)^{1/3},$$

此即所求。把右方记作 k（$k > 0$），则 $c - a = k(b-c)$，所以 $c(1+k) = a + kb$，而

$$c = \frac{a+kb}{1+k} = \frac{a\,f(b)^{1/3} + b\,f(a)^{1/3}}{f(a)^{1/3} + f(b)^{1/3}},$$

这里把分子和分母同时乘以 $f(b)^{1/3}$。

想一想 我们以前在哪里见过这条公式?

它正是第 (i) 部分的公式，只是把 f 换成 $f^{1/3}$，而后者在 $x > 0$ 时同样有定义且为正。所以 c 就是函数 $f^{1/3}$ 所对应的 m 值。取 $g_1 = f$ 及 $g_2 = f^{1/3}$，应用第 (iii) 部分：

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = f(x)^{2/3}.$$

若 f 递减且为正，则 $f^{2/3}$ 亦然，因为 $t \mapsto t^{2/3}$ 在 $t > 0$ 时递增。因此第 (iii) 部分给出 $M_1 > M_2$，其中 $M_1 = m$（对应 f 本身）及 $M_2 = c$。故 $c < m$。

验算

- 取 $a=1$、$b=4$。三个平均值为 $2.5>2>1.6$，而 $\mathrm{f}=\sqrt{x}$ 给出 $m=(1\cdot 2+4\cdot 1)/3=2=\sqrt{4}$。
- 当 $\mathrm{f}(x)=1/x$、$a=1$、$b=4$ 时：$m=\frac{1/4+4}{5/4}=3.4$，而 $k=4^{1/3}\approx 1.587$ 给出 $c\approx 2.84<3.4$，与第 (iv) 部分的预测一致。m 和 c 都位于 a 与 b 之间，正如加权平均必然如此。
- 在第 (ii) 部分中设 $n=0$，得 $\mathrm{f}=1$ 及 $m=\frac{a+b}{2}$；设 $n=-1$，得 $\mathrm{f}=x$ 及 $m=\frac{2ab}{a+b}$，与第 (iii) 部分一致。

以上各项，以及对每个结果在大量不同的 a、b 和 f 下所作的随机测试，均已用电脑核实。

常见错误

- 忘记 B 的高度是 $-\mathrm{f}(b)$，结果得出分母 $\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)$，而所得的点未必位于 a 与 b 之间。
- 在第 (iii) 部分，试图一次过交叉相乘四个函数值来比较 M_1 和 M_2，而不是化简为单一比值 r。
- 在第 (iv) 部分，把 $\mathrm{g}_1=\mathrm{f}^{1/3}$、$\mathrm{g}_2=\mathrm{f}$ 的次序弄反：它们的比值 $\mathrm{f}^{-2/3}$ 是递增的，所以按这个次序不能应用第 (iii) 部分。

STEP 之外

这里每一个 m 都是加权平均 $\lambda a+(1-\lambda)b$，而第 (iii) 部分巧妙地为整个幂平均族 $\left(a^{n+1}+b^{n+1}\right)/\left(a^n+b^n\right)$（即莱默平均（Lehmer means））排出大小次序，它们随 n 递增。平均值之间的不等式，以及背后的凸性（convexity）论证，是大学一年级分析课的基本内容。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）和 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）都是见识更多这类论证的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。