详细解答

# STEP III 2025，第 2 题

纯数学 · 迭代函数与周期性

**STEP III 2025，第 2 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 8.8 节周期三蕴含混沌中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/period-three.html

## 关键思路

本题所有函数都由直线段组成，所以整道题的关键在于清楚掌握自己身处哪一段。逐段求出 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 和 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$，利用内层函数的正负号去掉每个绝对值（modulus）。然后倒过来理解有关数列的问题：$\mathrm{f}^n(x) = x$ 的解是一个经过 $n$ 步后回到自身的起始值；而每个小于 7 的数在 f 下恰好有两个原像（preimage），且两者互为相反数。

## 解答

以下记 $\mathrm{f}^2(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ 和 $\mathrm{f}^3(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$。由于 f 只取决于 $|x|$，三个函数都是偶函数（even function），所以只需处理 $x \geq 0$ 的情况，再关于 $y$ 轴作反射即可。

### 第 (i) 部分

**(a)** $y = \mathrm{f}(x)$ 的图像是一个倒 V 形，顶点为 $(0, 7)$，斜率（gradient）为 $\mp 2$，与 $x$ 轴相交于 $x = \pm\frac{7}{2}$。

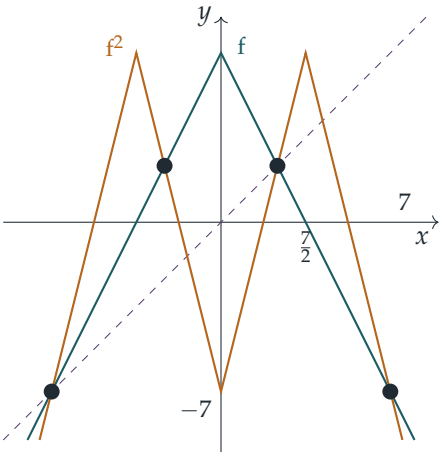
求 $\mathrm{f}^2$ 时需要知道 $\mathrm{f}(x)$ 的正负号。若 $0 \leq x \leq \frac{7}{2}$，则 $\mathrm{f}(x) = 7 - 2x \geq 0$，所以

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(7 - 2x) = 4x - 7.$$

若 $x \geq \frac{7}{2}$，则 $\mathrm{f}(x) \leq 0$，所以 $|\mathrm{f}(x)| = 2x - 7$，且

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(2x - 7) = 21 - 4x.$$

因此 $y = \mathrm{f}^2(x)$ 呈 W 形：在 $x = 0$ 处的值为 $-7$，在 $x = \pm\frac{7}{2}$ 处（正是 f 等于零的位置）有高度为 7 的峰，斜率为 $\pm 4$，$x$ 截距为 $\pm\frac{7}{4}$ 和 $\pm\frac{21}{4}$。解 $7 - 2x = 4x - 7$ 和 $7 - 2x = 21 - 4x$，可知两条图像相交于 $(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$ 和 $(\pm 7, -7)$。




（青色：$y = \mathrm{f}(x)$；琥珀色：$y = \mathrm{f}^2(x)$；虚线：$y = x$。）

**(b)** 我们在四段上分别求解，只保留落在相应范围内的根。

- $0 \le x \le \frac{7}{2}$：由 $4x - 7 = x$ 得 $x = \frac{7}{3}$，在范围内。
- $x \ge \frac{7}{2}$：由 $21 - 4x = x$ 得 $x = \frac{21}{5} = 4.2$，在范围内。
- $-\frac{7}{2} \le x \le 0$：此时 $\mathrm{f}^2(x) = -4x - 7$，由 $-4x - 7 = x$ 得 $x = -\frac{7}{5}$，在范围内。
- $x \le -\frac{7}{2}$：此时 $\mathrm{f}^2(x) = 21 + 4x$，由 $21 + 4x = x$ 得 $x = -7$，在范围内。

所以 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ 恰好有四个解：

$$x = -7, \quad -\frac{7}{5}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{21}{5}.$$

**(c)** 数列的周期（period）为 2，当且仅当 $u_2 = u_0$，即 $\mathrm{f}^2(a) = a$，但 $u_1 \ne u_0$，即 $\mathrm{f}(a) \ne a$。

> **想一想** (b) 的四个答案是否都给出周期为 2 的数列?

不是。其中两个是 f 本身的不动点（fixed point）：$\mathrm{f}(\frac{7}{3}) = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$ 与 $\mathrm{f}(-7) = 7 - 14 = -7$。它们给出常数数列，周期为 1。另外两个则互相交换：

$$\mathrm{f}\left(-\tfrac{7}{5}\right) = 7 - \tfrac{14}{5} = \tfrac{21}{5}, \qquad \mathrm{f}\left(\tfrac{21}{5}\right) = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}.$$

所以数列的周期为 2，当且仅当 $a = -\frac{7}{5}$ 或 $a = \frac{21}{5}$。

**(d)** 取 $a=\frac{28}{5}$，

$$u_1=7-\tfrac{56}{5}=-\tfrac{21}{5},\qquad u_2=7-\tfrac{42}{5}=-\tfrac{7}{5},\qquad u_3=\mathrm{f}\big(-\tfrac{7}{5}\big)=\tfrac{21}{5}.$$

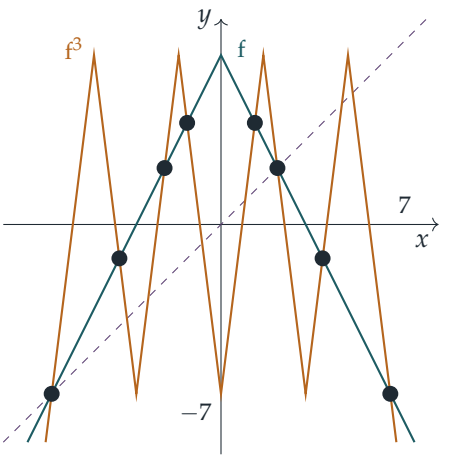
从 $u_2$ 起，该数列就是 (c) 部分中以 $-\frac{7}{5}$ 为起点的数列，所以 $u_2,u_3,u_4,\ldots$ 为 $-\frac{7}{5},\frac{21}{5},-\frac{7}{5},\ldots$，周期为 2。最后，$u_0=\frac{28}{5}$ 和 $u_1=-\frac{21}{5}$ 都与 $u_2=-\frac{7}{5}$ 及 $u_3=\frac{21}{5}$ 各不相同。（四对都要检查，不能只查 $u_0\neq u_2$ 和 $u_1\neq u_3$。）这正是题目所要求的。

**第 (ii) 部分**

**(a)** 现在把 f 作用于 $\mathrm{f}^2(x)$，在 $\mathrm{f}^2$ 每段变号的位置，即 $x=\frac{7}{4}$ 和 $x=\frac{21}{4}$ 处，把该段再分开。对于 $x\geq 0$：

$$\mathrm{f}^3(x)=7-2\big|\mathrm{f}^2(x)\big|=\begin{cases}7+2(4x-7)=8x-7, & 0\leq x\leq\frac{7}{4},\\ 7-2(4x-7)=21-8x, & \frac{7}{4}\leq x\leq\frac{7}{2},\\ 7-2(21-4x)=8x-35, & \frac{7}{2}\leq x\leq\frac{21}{4},\\ 7+2(21-4x)=49-8x, & x\geq\frac{21}{4}.\end{cases}$$

所以图像以斜率 $\pm 8$ 在 $-7$ 与 7 之间来回曲折：谷底在 $(0,-7)$ 和 $(\pm\frac{7}{2},-7)$，峰顶在 $(\pm\frac{7}{4},7)$ 和 $(\pm\frac{21}{4},7)$，然后在 $|x|>\frac{21}{4}$ 时一直下降。把 $7-2x$ 与每一段联立求解，可知它与 $y=\mathrm{f}(x)$ 相交于 $(\pm\frac{7}{5},\frac{21}{5})$、$(\pm\frac{7}{3},\frac{7}{3})$、$(\pm\frac{21}{5},-\frac{7}{5})$ 和 $(\pm 7,-7)$。




（青色：$y=\mathrm{f}(x)$；琥珀色：$y=\mathrm{f}^3(x)$；虚线：$y=x$。）

**(b)** 从 $a=1$ 开始：$u_1=7-2=5$，$u_2=7-10=-3$，$u_3=7-6=1$。从 $a=-\frac{7}{9}$ 开始：

$$u_1=7-\tfrac{14}{9}=\tfrac{49}{9},\qquad u_2=7-\tfrac{98}{9}=-\tfrac{35}{9},\qquad u_3=7-\tfrac{70}{9}=-\tfrac{7}{9}.$$

所以两个数列都在三步后回到起点：它们分别是 3-循环（cycle）$1 \to 5 \to -3 \to 1$ 和 $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$。

3-循环中的每一项(不只是起始值)都满足 $\mathrm{f}^3(x) = x$,所以这给出六个解 $1, 5, -3, -\frac{7}{9}, \frac{49}{9}, -\frac{35}{9}$。此外，f 的任何不动点都满足 $\mathrm{f}^3(x) = x$，这就加上第 (i) 部分的 $\frac{7}{3}$ 和 $-7$。合共八个不同的解。

**想一想** 我们怎样知道没有其他解?

(ii)(a) 中的公式显示 $\mathrm{f}^3$ 由八段直线组成（$x \geq 0$ 时四段，加上它们的镜像），每段的斜率都是 $\pm 8$。由于没有任何一段与 $y = x$ 平行，每段与直线 $y = x$ 最多相交一次，所以最多有八个解。我们已找到八个，因此 $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x$ 的完整解集是

$$x = -7, \quad -\tfrac{35}{9}, \quad -3, \quad -\tfrac{7}{9}, \quad 1, \quad \tfrac{7}{3}, \quad 5, \quad \tfrac{49}{9}.$$

（草图亦吻合：虚线与八条琥珀色线段各相交一次。）

**(c)** 我们仿照 (i)(d) 的思路，从一个 3-循环倒推。由于 $\mathrm{f}(y) = c$ 表示 $|y| = \frac{1}{2}(7 - c)$，每个 $c < 7$ 恰有两个原像 $\pm\frac{1}{2}(7 - c)$。从循环 $1 \to 5 \to -3 \to 1$ 中取 $u_3 = 1$。1 在循环内的原像是 $-3$，所以要离开循环，就选另一个原像 $u_2 = 3$，它不在循环中。于是

$$\mathrm{f}(u_1) = 3 \;\Rightarrow\; |u_1| = 2, \quad \text{取} u_1 = 2; \qquad \mathrm{f}(u_0) = 2 \;\Rightarrow\; |u_0| = \tfrac{5}{2}, \quad \text{取} u_0 = \tfrac{5}{2}.$$

所以 $a = \frac{5}{2}$ 可行。顺推验证：

$$\tfrac{5}{2},\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ -3,\ 1,\ 5,\ -3,\ \ldots$$

从 $u_3$ 起，数列沿循环 $1, 5, -3$ 运行，周期为 3；而 $u_0, u_1, u_2 = \frac{5}{2}, 2, 3$ 都与 1、5 和 $-3$ 不同。

（其他选择亦可：例如 $a = -\frac{5}{2}$ 或 $a = \pm\frac{9}{2}$，它们导致 $u_1 = -2$；或 $a = \frac{3}{2}$，它经由 $u_2 = -1$ 在 $u_3 = 5$ 进入循环。）

## 验算

- 每个所声称的解都可以用手迭代验证：例如 $\frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9} \to \frac{49}{9}$，以及 $\frac{28}{5} \to -\frac{21}{5} \to -\frac{7}{5} \to \frac{21}{5} \to -\frac{7}{5}$。
- 用电脑在 $-30 \leq x \leq 30$ 范围内扫描 $\mathrm{f}^3(x) - x$，只在 $-7$、$-3.889$、$-3$、$-0.778$、1、2.333、5 和 5.444 附近发现变号，与八个解吻合；对 $\mathrm{f}^2(x) - x$ 作同样扫描，只发现 $-7$、$-1.4$、2.333 和 4.2。
- 计数检查：$\mathrm{f}^n$ 有 $2^n$ 段斜率为 $\pm 2^n$ 的线性段，所以 $\mathrm{f}^n(x) = x$ 有 $2^n$ 个解。当 $n = 2$ 时，这是 $4 = 2 + 2$（两个不动点和一个 2-循环）；当 $n = 3$ 时，这是 $8 = 2 + 3 + 3$（两个不动点和两个 3-循环）。

## 常见错误

- 在 (i)(c) 中给出 (i)(b) 的全部四个解：不动点给出的周期是 1。
- 在 (ii)(b) 中只列出 1 和 $-\frac{7}{9}$，或忘记不动点 $\frac{7}{3}$ 和 $-7$ 亦满足 $\mathrm{f}^3(x) = x$。
- 草图中把图像交点的位置画错；用代数方法求出交点即可避免。

## STEP 之外

这是离散动力系统（discrete dynamical system）的初步体验。由于 f 是斜率为 2 的帐篷映射（tent map），$\mathrm{f}^n$ 有 $2^n$ 段，所以存在任何周期的周期点，而这个映射是混沌（chaotic）行为的标准例子。沙可夫斯基定理（Sharkovskii's theorem）指出，对于实数线上的连续映射，若存在周期为 3 的点，则必存在任何周期的点，这就是著名的口号“周期三意味着混沌”（period three implies chaos）。Strogatz 的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非线性动力学与混沌》）是一本易读的迭代映射入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。