详细解答

# STEP III 2025，第 10 题

力学 · 移动木板上的摩擦力

> **STEP III 2025，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

## 关键思路

先解关于 h 的微分方程（differential equation）：这是简谐运动（simple harmonic motion），它表示木板的倾角以恒定速率 $\omega$ 增加。知道角度之后，质点的位置固定在木板全长的某个比例处，因此求两次导数（derivative）便得到它的加速度。然后在垂直于木板和沿着木板两个方向分解，应用牛顿第二定律（Newton's second law）就得出各个力，这比沿水平和铅垂方向分解简洁得多。

## 解答

我们把木板视为刚性杆，把 $P$ 视为质点。设 $\theta$ 为木板与水平面所成的角。

### 第 (i) 部分

方程 $\ddot{\mathrm{h}} = -\omega^2 \mathrm{h}$ 的通解（general solution）为 $\mathrm{h} = a\cos\omega t + b\sin\omega t$。条件 $\mathrm{h}(0) = 0$ 给出 $a = 0$，而 $\dot{\mathrm{h}}(0) = b\omega = \omega L$ 给出 $b = L$，所以

$$\mathrm{h}(t) = L\sin\omega t.$$

由于 $A$ 位于高度 h，而木板长度为 $L$，故 $\sin\theta = \mathrm{h}/L = \sin\omega t$，所以 $\theta = \omega t$（对 $0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2}$ 成立，这已涵盖整个运动过程：在此之后 $A$ 便须升至高于 $L$ 的高度）。因此 $A = (0, L\sin\omega t)$，$B = (L\cos\omega t, 0)$。

点 $C$ 位于由 $A$ 到 $B$ 的比例 $s$ 处，所以 $C = A + s(B - A)$：

$$x = sL\cos\omega t, \qquad y = (1-s)L\sin\omega t.$$

第一式就是所求的 $x$ 坐标，第二式则是相应的 $y$ 坐标表达式。

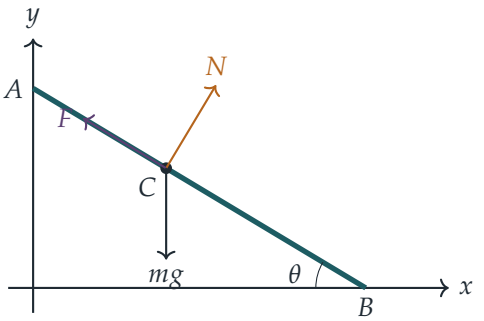
**第 (ii) 部分**

对 $t$ 求导两次，

$$\ddot{x} = -sL\omega^2 \cos\omega t, \qquad \ddot{y} = -(1-s)L\omega^2 \sin\omega t.$$

**第 (iii) 部分**

作用在 $P$ 上的力有：向下的重量 $mg$、垂直于木板（向上）的法向反作用力（normal reaction）$N$，以及沿木板方向的摩擦力（friction）$F$；我们规定 $F$ 沿斜面向上、指向 $A$ 时为正。




垂直于木板（向上）的单位向量（unit vector）是 $(\sin\theta, \cos\theta)$，沿木板指向 $A$ 的单位向量是 $(-\cos\theta, \sin\theta)$，其中 $\theta = \omega t$。把运动方程 $m(\ddot{x}, \ddot{y}) = N(\sin\theta, \cos\theta) + F(-\cos\theta, \sin\theta) + (0, -mg)$ 在这两个方向上分解（即分别与每个单位向量取点积（dot product））：

*垂直于木板方向。*

$$\begin{aligned} N - mg\cos\theta &= m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) \\ &= -mL\omega^2(s + (1-s))\sin\theta\cos\theta = -mL\omega^2 \sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

由 $L\omega^2 = kg$，得

$$N = mg\cos\theta - mgk\sin\theta\cos\theta = mg(1 - k\sin\omega t)\cos\omega t,$$

与所求相符。

*沿木板指向 $A$ 方向。*

$$\begin{aligned} F - mg\sin\theta &= m(-\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) \\ &= mL\omega^2(s\cos^2\theta - (1-s)\sin^2\theta) = mgk(s - \sin^2\theta), \end{aligned}$$

这里用了 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$。因此

$$F = mgsk + mg\sin\theta(1 - k\sin\theta) = mgsk + \underbrace{mg(1 - k\sin\theta)\cos\theta}_{N}\tan\theta,$$

即 $F = mgsk + N\tan\omega t$，与所求相符。留意只要 $N > 0$，$F$ 便是正数，所以当 $P$ 紧贴木板时，摩擦力总是沿木板向上作用。

### 第 (iv) 部分

记 $\mu = \tan\alpha$。当 $N > 0$ 时，质点留在 $C$ 而不滑动，当且仅当 $|F| \le \mu N$；由于此时 $F > 0$，这等价于 $F/N \le \tan\alpha$。把第 (iii) 部分的结果除以 $N$，

$$\frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta)\cos\theta} + \tan\theta.$$

开始时，$\theta = 0$，所以 $N = mg > 0$ 且 $F/N = sk$。因此只要 $sk < \tan\alpha$，质点在开始时便不会滑动。

> **想一想** 为甚么比值 $F/N$ 必定会在 $N$ 变为零之前达到 $\tan\alpha$?

现在假设 $sk < \tan\alpha$。因子 $\cos\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 时为零；若 $k > 1$，因子 $1 - k\sin\theta$ 会更早在 $\sin\theta = 1/k$ 时变为零。设 $\theta_0$ 为首个使 $N = 0$ 的角度（即 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\arcsin(1/k)$）。在 $0 \le \theta < \theta_0$ 上，$N > 0$，且 $F/N$ 连续（continuous）。当 $\theta \to \theta_0^-$ 时，分母 $(1 - k\sin\theta)\cos\theta$ 经正值趋于 0，而分子 $sk$ 是固定的正数，所以第一项趋于 $+\infty$（而 $\tan\theta$ 要么有界，要么同样趋于 $+\infty$）。因此 $F/N \to +\infty$。

所以 $F/N$ 由 $sk < \tan\alpha$ 开始,并在 $N$ 降至零之前无界地增大。根据介值定理(intermediate value theorem)，存在首个角度 $\theta_1 < \theta_0$ 使 $F/N = \tan\alpha$，质点就在此时开始滑动。这发生在 $N$ 仍为正的角度，这就是第一个结论。

在这个角度，由于 $sk > 0$ 且 $(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1 > 0$，

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1} + \tan\theta_1 > \tan\theta_1.$$

$\alpha$ 和 $\theta_1$ 都在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 内，而 tan 在此区间上递增，所以 $\theta_1 < \alpha$：开始滑动时，木板与水平面所成的角小于 $\alpha$。这就是第二个结论。

第二个结论其实没有看上去那么出人意表。在固定木板上静止的质点，恰好在木板倾角达到摩擦角（angle of friction）$\alpha$ 时滑动。这里木板在加速，要带动质点一同运动需要额外的力（即 $mgsk$ 项），因此摩擦力会更早支撑不住。

## 验算

- 当 $t = 0$ 时，木板水平，质点的加速度为 $(-sL\omega^2, 0)$，方向水平。此时 $N = mg$，而 $F = msL\omega^2 = mgsk$ 应恰好提供这个加速度，结果确实如此。
- 若 $\omega \to 0$（从而 $k \to 0$），木板被非常缓慢地擡起；此时 $N \to mg\cos\theta$，$F \to mg\sin\theta$，正是固定斜面上熟悉的平衡值，而滑动发生在 $\theta = \alpha$，即我们不等式的边界。
- 数值上，取 $s = \frac{1}{2}$、$k = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = \frac{\pi}{4}$（所以 $sk = \frac{1}{4} < 1$），解 $F/N = 1$ 可知滑动发生在 $\theta \approx 0.545$ rad，约 $31°$，此时 $N \approx 0.63mg > 0$ 且 $\theta < 45°$。用电脑对数以千计随机选

取、满足 $sk < \tan\alpha$ 的 $s$、$k$ 和 $\alpha$ 进行检验，每次都发现滑动发生在小于 $\alpha$ 的角度，且 $N > 0$。

## 常见错误

- 把 $\theta$ 取为在 $A$ 处而非 $B$ 处的角：这样正弦和余弦会互换，便得不出题目给出的表达式。
- 沿水平和铅垂方向分解，然后试图解一对满是 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的联立方程。沿木板及垂直于木板分解，能立即把 $N$ 和 $F$ 分开。
- 在第 (iv) 部分，只考虑 $\theta$ 趋近 $\frac{\pi}{2}$ 的情况，而忘记当 $k > 1$ 时，法向反作用力会更早在 $\sin\theta = 1/k$ 时变为零。

## STEP 之外

这道题关乎运动参考系中的力：从木板的角度看，质点会感受到一个额外的“虚构”力（fictitious force），大小等于 $-m$ 乘以点 $C$ 的加速度，而 $mgsk$ 项正是开始时的这个惯性力。在大学里，这个概念会发展成加速参考系和转动参考系的完整理论，包括离心力（centrifugal force）和科里奥利力（Coriolis force）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）讨论了非惯性参考系，并附有大量例题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。