详细解答

STEP III 2025，第 1 题

纯数学 • Beta 函数积分

STEP III 2025，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

这里用到的每一步，不是代换（substitution），就是恒等式（identity）$x+(1-x)=1$。反射 $x \mapsto 1-x$ 会把 p 和 q 的角色互换；用 $x+(1-x)$ 拆开被积函数（integrand），可以把相邻的值联系起来；$x=\sin^2\theta$ 把积分化成三角积分；而 $x=t/(1+t)$ 则把 $[0,1)$ 拉伸到 $[0,\infty)$。最后那个积分就是把前面的结果串连起来，最终化为一个可以亲手计算的 $\sin^4\theta$ 积分。

解答

第 (i) 部分

代入 $u=1-x$，于是 $\mathrm{d}x=-\mathrm{d}u$，而 $x=0,1$ 分别对应 $u=1,0$：

$$\mathrm{b}(p,q)=\int_1^0 (1-u)^{p-1}u^{q-1}\,(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 u^{q-1}(1-u)^{p-1}\,\mathrm{d}u=\mathrm{b}(q,p).$$

第 (ii) 部分

把右方的两个积分相加，

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(p+1,q)+\mathrm{b}(p,q+1)&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}[x+(1-x)]\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x=\mathrm{b}(p,q),\end{aligned}$$

移项即得 $\mathrm{b}(p+1,q)=\mathrm{b}(p,q)-\mathrm{b}(p,q+1)$。

现在设 $q = p$。由第 (i) 部分，$\mathrm{b}(p, p+1) = \mathrm{b}(p+1, p)$，所以

$$\mathrm{b}(p+1,p) = \mathrm{b}(p,p) - \mathrm{b}(p+1,p) \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{b}(p+1,p) = \tfrac{1}{2}\mathrm{b}(p,p).$$

第 (iii) 部分

设 $x = \sin^2\theta$, 则 $\mathrm{d}x = 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$, 且 $1 - x = \cos^2\theta$。当 θ 由 0 变到 $\frac{1}{2}\pi$ 时, x 由 0 递增至 1, 而且 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 都是非负的, 因此 $x^{p-1} = (\sin\theta)^{2p-2}$ 及 $(1-x)^{q-1} = (\cos\theta)^{2q-2}$, 正负号不会出问题。因此

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-2}(\cos\theta)^{2q-2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}(\cos\theta)^{2q-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

至于第二个结果，取 $q = p$，并利用 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$:

$$\mathrm{b}(p,p) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right)^{2p-1}\mathrm{d}\theta = 2^{2-2p}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin 2\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta = 2^{1-2p}\int_0^{\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi,$$

其中 $\phi = 2\theta$。

> **想一想** 怎样才能回到一个在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上、形如 $\mathrm{b}(p,\cdot)$ 的积分?

$\sin\phi$ 在 $[0,\pi]$ 上的图像关于 $\phi = \frac{1}{2}\pi$ 对称(代入 $\phi \mapsto \pi - \phi$ 即可见),所以在 $[0,\pi]$ 上的积分是在 $[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上积分的两倍。此外, 在三角形式中取 $q = \frac{1}{2}$, 便有 $(\cos\theta)^{2q-1} = (\cos\theta)^0 = 1$, 得

$$\mathrm{b}(p, \tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\theta)^{2p-1}\,\mathrm{d}\theta.$$

因此

$$\mathrm{b}(p,p) = 2^{1-2p}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin\phi)^{2p-1}\,\mathrm{d}\phi = 2^{1-2p}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^{2p-1}}\,\mathrm{b}(p,\tfrac{1}{2}),$$

正是所求。

第 (iv) 部分

我们希望当 t 由 0 变到 ∞ 时，x 由 0 变到 1，同时 $1-x$ 的形式要简单；$x = \dfrac{t}{1+t}$ 两者兼备，且

$$1 - x = \frac{1}{1+t}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{(1+t)-t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}.$$

当 t 由 0 递增至 ∞ 时，x 由 0 递增并趋向 1。所以

$$\mathrm{b}(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^{q-1}}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t.$$

第 (v) 部分

把被积函数与第 (iv) 部分对照：$p-1=\frac{3}{2}$ 且 $p+q=6$，所以 $p=\frac{5}{2}$，$q=\frac{7}{2}$。这个积分就是 $\mathrm{b}(\frac{5}{2},\frac{7}{2})$，我们逐步把它化简：

$$\begin{aligned}\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{7}{2}) &= \mathrm{b}(\tfrac{7}{2},\tfrac{5}{2}) && \text{由 (i)}\\ &= \tfrac{1}{2}\,\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{5}{2}) && \text{由 (ii)，取} p=\tfrac{5}{2}\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}\,\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}) && \text{由 (iii)，取} p=\tfrac{5}{2}.\end{aligned}$$

最后，由三角形式取 $p=\frac{5}{2}$、$q=\frac{1}{2}$，

$$\mathrm{b}(\tfrac{5}{2},\tfrac{1}{2}) = 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

两次使用 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$，

$$\sin^4\theta=\tfrac{1}{4}(1-2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)=\tfrac{1}{8}(3-4\cos 2\theta+\cos 4\theta).$$

余弦项在 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上的积分为零（它们的原函数（antiderivative）$\sin 2\theta$ 和 $\sin 4\theta$ 在两个端点都等于零），所以 $\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{2}\pi=\frac{3\pi}{16}$，而 $\mathrm{b}(\frac{5}{2},\frac{1}{2})=\frac{3\pi}{8}$。因此

$$\int_0^\infty \frac{t^{\frac{3}{2}}}{(1+t)^6}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{32}\cdot\frac{3\pi}{8}=\frac{3\pi}{256}.$$

验算

- 取 $p=q=1$，由定义得 $\mathrm{b}(1,1)=1$，而 (ii) 给出 $\mathrm{b}(2,1)=\frac{1}{2}$，与直接计算 $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ 的结果吻合。
- 同样取 $p=1$，第 (iii) 部分说 $\mathrm{b}(1,1)=\frac{1}{2}\,\mathrm{b}(1,\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\int_0^1(1-x)^{-1/2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2=1$。结果一致。
- 数值上，$3\pi/256\approx 0.036816$，而用电脑直接对 $t^{3/2}/(1+t)^6$ 在 $[0,\infty)$ 上作数值积分，结果在很多位小数上都吻合。再粗略检查一下大小：被积函数在 $t=\frac{1}{3}$ 处达到峰值，约为 0.034，其“隆起”部分的宽度约为 1 的数量级，所以积分值为百分之几是合理的。

常见错误

- 在 (iv) 中，忘记了 $\mathrm{d}x$ 带来的因子 $(1+t)^{-2}$，结果得出错误的幂 $p+q-2$。
- 在 (iii) 中，只在 θ 的区间 $[0,\frac{1}{2}\pi]$ 上积分 $(\sin 2\theta)^{2p-1}$，却忘记了 $\phi=2\theta$ 会令积分范围加倍、并令 $\mathrm{d}\theta$ 减半。
- 在 (v) 中，把 p 对应到指数 $\frac{3}{2}$，而不是 $\frac{3}{2}+1$。

STEP 之外

函数 b(p,q) 就是欧拉（Euler）的 beta 函数（beta function），通常记作 $B(p,q)$。它与 gamma 函数（gamma function）的关系是 $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$，而第 (iii) 部分的结果正是 Γ 的勒让德（Legendre）倍元公式（duplication formula）的一种形式；利用 $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$，一行便可重新得出 $3\pi/256$。beta 函数在概率论中亦有出现，它是 beta 分布（beta distribution）的归一化常数（normalising constant）。想进一步了解这类积分，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）；关于 beta 分布，则可参阅 Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。