详细解答

STEP II 2025，第 9 题

力学 · 碰撞与抛体

STEP II 2025，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

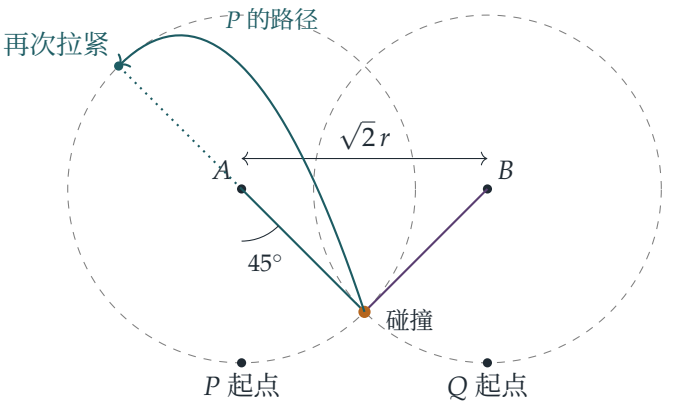
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

对称性（symmetry）完成了大部分工作。两质点必定在 AB 的垂直平分线（perpendicular bisector）上相遇，这就确定了它们碰撞时的位置和速率。碰撞刚结束时，每条绳子都会松弛，所以每个质点都只是普通的抛射体（projectile），直至它与悬点的距离回升至 r 为止。把这个距离条件写出来，就得到一条关于 t 的四次方程（quartic）。三重根（triple root）有其物理意义：质点到达圆周时正沿着圆周运动，因此绳子拉紧时不会产生急扯。

解答

模型：P 和 Q 是质量为 m 的质点（在碰撞中视作细小光滑的球体），绳子轻而不可伸长，且没有空气阻力。设 P 在左方，悬于 A，并以 A 为原点取坐标轴，x 轴水平（指向 B），y 轴竖直向上。



上图显示在第 (iv) 部分的特殊情况下，P 在碰撞后的飞行轨迹：它在远侧、水平线以上 45° 的位置重新回到自己的圆周上。

第 (i) 部分

整个装置关于 AB 的垂直平分线对称，所以两质点在这条线上相遇。此时每个质点都已从最低点水平移动了 $\frac{1}{2}\sqrt{2}\,r = r\sin 45^\circ$，所以每条绳子与向下的竖直方向成 45°。每个质点上升了 $r - r\cos 45^\circ = r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$。到这一刻为止绳子都是拉紧的，而其张力（tension）不做功，所以由能量守恒（conservation of energy），碰撞前一刻的速率 v 满足

$$v^2 = u^2 - 2gr\left(1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = u^2 - gr(2 - \sqrt{2}).$$

（两质点要到达这里，需要 $u^2 > gr(2-\sqrt{2})$。）

每个质点都沿着自己的圆周运动，与水平成 45°，所以

$$\text{速度：质点}P = \left(\tfrac{v}{\sqrt{2}},\ \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right), \qquad \text{速度：质点}Q = \left(-\tfrac{v}{\sqrt{2}},\ \tfrac{v}{\sqrt{2}}\right).$$

两质点在同一高度相遇，所以连心线（line of centres）是水平的，两者之间的冲量（impulse）也是水平的。因此竖直分量保持不变。在水平方向上，两者的动量大小相等、方向相反，所以碰撞前后的总动量都是零。于是由牛顿恢复定律（Newton's law of restitution），每个质点都以接近速率的 e 倍反弹。碰撞刚结束时，

$$\text{水平速率} = \frac{ev}{\sqrt{2}} = \tfrac{1}{2}ev\sqrt{2}, \qquad \text{竖直分量} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,v\ (\text{向上}),$$

而 P 此时正向左运动，远离 Q。

> **想一想** 在碰撞期间，绳子会否也施加冲量？

不会。绳子只能拉，而且只能沿自身方向拉。碰撞刚结束时，P 相对于 A 位于 $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, -\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$，速度为 $\left(-\frac{ev}{\sqrt{2}}, \frac{v}{\sqrt{2}}\right)$。它沿 $\overrightarrow{AP}$ 的分量是 $-\frac{1}{2}(1+e)v < 0$，所以 P 正向 A 运动。绳子立即松弛，因此从来不需要冲击张力。

第 (ii) 部分

从碰撞时起计算 t。在绳子再次拉紧之前，P 是一个抛射体，所以相对于 A，

$$x = \frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{ev}{\sqrt{2}}\,t, \qquad y = -\frac{r}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{2}}\,t - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

绳子拉紧的条件恰好是 $x^2 + y^2 = r^2$。乘以 2，使 $\sqrt{2}\,x$ 和 $\sqrt{2}\,y$ 出现，得

$$(r - evt)^2 + \left(-r + vt - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,gt^2\right)^2 = 2r^2.$$

这条式在 $t=0$ 时成立，因为在碰撞那一刻绳子仍然拉紧，所以我们要找的时间是一个非零根。由对称性，Q 在同一时刻发生同样的情况。两质点在水平方向上互相远离，所以它们不可能先再次相撞。

第 (iii) 部分

展开并消去 $2r^2$：

$$\tfrac{1}{2}g^2t^4-\sqrt{2}\,gv\,t^3+\big((1+e^2)v^2+\sqrt{2}\,rg\big)t^2-2(1+e)rv\,t=0.$$

除以 $t\neq 0$ 后剩下一条三次方程（cubic）。现在

$$\frac{z}{c}=\frac{vt}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}\,v^2}=\frac{gt}{\sqrt{2}\,v},\qquad \text{所以}\qquad t=\frac{\sqrt{2}\,v}{g}\cdot\frac{z}{c}.$$

代入此式，并把整条三次方程除以 $\sqrt{2}\,v^3/g$。记 $w=z/c$，各项变为

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}g^2t^3 &\longrightarrow w^3,\\
-\sqrt{2}\,gv\,t^2 &\longrightarrow -2w^2,\\
\big((1+e^2)v^2+\sqrt{2}\,rg\big)t &\longrightarrow \Big(1+e^2+\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}\Big)w=\Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)w,\\
-2(1+e)rv &\longrightarrow -\frac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}(1+e)=-\frac{2}{c}(1+e),
\end{aligned}$$

其中用到 $\dfrac{2}{c}=\dfrac{2rg}{\sqrt{2}\,v^2}=\dfrac{\sqrt{2}\,rg}{v^2}$。这就是所求的方程

$$\Big(\frac{z}{c}\Big)^3-2\Big(\frac{z}{c}\Big)^2+\Big(\frac{2}{c}+1+e^2\Big)\Big(\frac{z}{c}\Big)-\frac{2}{c}(1+e)=0.$$

第 (iv) 部分

若关于 w 的三次方程有三重根 α，它必定是 $(w-\alpha)^3=w^3-3\alpha w^2+3\alpha^2w-\alpha^3$。比较系数，

$$3\alpha=2,\qquad 3\alpha^2=\frac{2}{c}+1+e^2,\qquad \alpha^3=\frac{2}{c}(1+e).$$

所以 $\alpha=\frac{2}{3}$。记 $k=2/c$。于是 $k=\frac{4}{3}-1-e^2=\frac{1}{3}-e^2$，而最后一条方程变为

$$\Big(\tfrac{1}{3}-e^2\Big)(1+e)=\tfrac{8}{27}\iff 27e^3+27e^2-9e-1=0\iff(3e-1)(9e^2+12e+1)=0.$$

二次因式的根是 $\frac{-2\pm\sqrt{3}}{3}$,两者都是负数,所以不可能是恢复系数(coefficient of restitution)。因此 $e=\frac{1}{3}$。于是 $k=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$，所以 $c=9$，并且

$$v^2=\frac{c\,rg}{\sqrt{2}}=\frac{9rg}{\sqrt{2}}=\tfrac{9}{2}\sqrt{2}\,rg,$$

正如所求。

想一想 重根说明了运动的甚么特点?

设 $D(t) = x^2 + y^2 - r^2$。除一个正因子外，D 等于 $w(w-\alpha)^3$。当 $0 < w < \alpha$ 时它是负数，所以在绳子拉紧之前，P 一直严格位于自己的圆内。由于 α 是重根（repeated root），在该处亦有 $D' = 0$。但 $D' = 2(x\dot{x} + y\dot{y})$，所以在那一刻，沿绳子方向的速度分量是零：质点到达时正沿着圆周运动。冲击张力会沿绳子方向作用，只有在需要消除沿绳子方向的速度分量时才会出现。这里没有这样的分量，所以没有冲量，速度不变，也没有动能损失。

第 (v) 部分

能量只在碰撞中损失。从碰撞到圆周最低点之间，只有重力做功：飞行期间没有张力，拉紧时没有急扯，之后张力又与运动方向垂直。碰撞刚结束时，速率的平方是

$$\frac{e^2v^2}{2} + \frac{v^2}{2} = \frac{(1+e^2)v^2}{2},$$

而质点位于其最低点之上 $r\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 处。因此

$$U^2 = \frac{(1+e^2)v^2}{2} + gr\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{9rg}{\sqrt{2}} + gr\left(2-\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{5\sqrt{2}}{2}rg + (2-\sqrt{2})rg = \left(2+\tfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}rg.$$

我们还应检查绳子在下摆途中一直保持拉紧。当 $w = \frac{2}{3}$ 时，$t = \frac{2\sqrt{2}v}{3g}$。代入后得位置 $\left(-\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ 及速度 $\left(-\frac{v}{3\sqrt{2}}, -\frac{v}{3\sqrt{2}}\right)$。所以 P 在远离 B 的一侧、水平线以上 45° 处重新回到自己的圆周上，速率的平方为 $\frac{v^2}{9} = \frac{rg}{\sqrt{2}}$。在该处沿指向 A 的方向分解，

$$T + mg\sin 45^\circ = \frac{m}{r}\cdot\frac{rg}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad T = 0,$$

所以绳子拉紧时张力为零。当 P 向下摆动时，其速率增加，而重力向内的分量减少，所以此后 $T > 0$。质点沿圆周一直摆到最低点；若从这一点起用能量计算，也得到相同的 U^2 值：$\frac{rg}{\sqrt{2}} + 2gr\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)rg$。

验算

- 取 $r = 1$ 及 $g = 9.81$，以电脑逐步模拟飞行和圆周摆动，得 $U^2 \approx 40.430$。这与 $\frac{1}{2}(4+3\sqrt{2})g \approx 40.430$ 吻合，而且在整个摆动过程中张力一直非负。
- 求 U^2 的两条途径（从碰撞点出发，以及从绳子拉紧的位置出发）结果一致。
- 若 $e = 1/3$ 且 $c = 9$，则 $w^3 - 2w^2 + \frac{4}{3}w - \frac{8}{27} = \left(w - \frac{2}{3}\right)^3$ 准确成立。

常见错误

- 把上升的高度当作 $r\cos 45°$（即悬点以下的深度），而不是 $r - r\cos 45°$。
- 把恢复定律应用于整个速度。只有沿连心线的分量（这里是水平分量）会受影响。
- 忘记排除关于 e 的三次方程的负根。

STEP 之外

重根条件表示两条曲线（抛射体的抛物线和圆）以高阶相切：它们相交、有共同的切线，而在这里甚至有相同的曲率（curvature），这正是绳子拉紧时张力恰好为零的原因。接触阶（order of contact）和密切圆（osculating circle）会在大学一年级的曲线及微分几何（differential geometry）课程中出现。冲击约束（impulsive constraint）以及它们何时会耗散能量，是动力学中的标准课题。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）是看这些概念如何发展的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。