详细解答

STEP II 2025，第 8 题

纯数学 · 整数的平衡分拆

STEP II 2025，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

把一个集合的每个元素都加上同一个数 c，其总和与平方和的变化是可以控制的：变化只取决于元素的个数、元素之和，（就平方而言）再无其他。因此，若两个元素个数相同的集合，其总和与平方和已经相等，那么把两者各自平移一份再互相对调，便可构造出一个更大的平衡分割（balanced partition）。第 (ii) 部分正是这个想法背后的代数，第 (iii) 及 (iv) 部分则是它的两个应用。

解答

第 (i) 部分

$1, 2, \ldots, 8$ 的总和是 36，它们的平方和是 204，所以每一半的总和须为 18，平方和须为 102。

把 8 放进 B。B 其余三个元素的总和须为 10，平方和须为 $102 - 64 = 38$。由 1 至 7 中选出三个互不相同、总和为 10 的数，所得三元组为

$$\{1,2,7\},\ \{1,3,6\},\ \{1,4,5\},\ \{2,3,5\},$$

其平方和分别为 54、46、42 和 38。只有 $\{2,3,5\}$ 符合要求，所以

$$A = \{1,4,6,7\}, \qquad B = \{2,3,5,8\}.$$

验证：$1+4+6+7 = 18 = 2+3+5+8$，且 $1+16+36+49 = 102 = 4+9+25+64$。（以上搜索亦显示，除了对调 A 与 B 之外，这是唯一一个分成两组各四个数的平衡分割。）

第 (ii) 部分

用二项式定理（binomial theorem）展开每个立方：

$$\sum_{k=1}^{m}(c+b_k)^3 = mc^3 + 3c^2\sum_{k=1}^{m} b_k + 3c\sum_{k=1}^{m} b_k^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k^3,$$

以 a_k 代替 b_k 亦同理。因此

$$\begin{aligned}&\left(\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3\right) - \left(\sum b_k^3 + \sum(c+a_k)^3\right)\\ &\qquad = 3c^2\left(\sum b_k - \sum a_k\right) + 3c\left(\sum b_k^2 - \sum a_k^2\right),\end{aligned}$$

因为 mc^3 项互相抵消，两份 $\sum a_k^3$ 和两份 $\sum b_k^3$ 亦然。根据假设，两个括号都等于零，所以对每个实数 c，两边都相等，得证。

留意同样的展开降低一次方便得到

$$\sum a_k^2 + \sum(c+b_k)^2 - \sum b_k^2 - \sum(c+a_k)^2 = 2c\left(\sum b_k - \sum a_k\right) = 0,$$

而对一次方则有 $\sum a_k + \sum(c+b_k) = \sum b_k + \sum(c+a_k)$，因为两者都等于 $mc + \sum a_k + \sum b_k$。

第 (iii) 部分

取 (i) 中的平衡分割，令 a_k 依次取 $1,4,6,7$，b_k 依次取 $2,3,5,8$，并取 $c = 8$。于是 $c + a_k$ 依次为 $9,12,14,15$，$c + b_k$ 依次为 $10,11,13,16$。设

$$A = \{1,4,6,7\} \cup \{10,11,13,16\}, \qquad B = \{2,3,5,8\} \cup \{9,12,14,15\}.$$

这两个集合不相交（disjoint），各有 8 个元素，合起来正是 $\{1,2,\ldots,16\}$，因为 $\{1,\ldots,8\}$ 和 $\{9,\ldots,16\}$ 都分别被分到两者之中。

> ? **想一想** 为甚么要把 B 的平移副本放进 A，而不是把 A 的平移副本放进去?

因为这正是 (ii) 的模式：该处左边是 $\sum a_k^3 + \sum(c+b_k)^3$，即我们的 A 的立方和；右边则是我们的 B 的立方和。所以取 $c = 8$ 代入 (ii)，便得到两者的立方和相等。(ii) 末尾的两条额外恒等式则给出总和相等及平方和相等，所以这个分割同样是平衡的。

直接计算：两半的总和都是 68，平方和都是 748，立方和都是 9248。

第 (iv) 部分

把 S 的元素写成 $(n+k)^2$，其中 $k = 0,1,\ldots,11$。对任何由 k 值组成的集合 K，

$$\sum_{k\in K}(n+k)^2 = |K|\,n^2 + 2n\sum_{k\in K} k + \sum_{k\in K} k^2.$$

所以，若把 $\{0,1,\ldots,11\}$ 分成两个大小相同、总和相同、平方和亦相同的集合，则对应的平方数对每个 n 都会有相等的总和。

题目给出的 $\{1,\ldots,11\}$ 的分割，总和相等（各为 33），平方和亦相等（各为 253），但两部分的大小分别是 6 和 5。把 $k=0$ 加进较小的部分便可解决这个问题：它使大小增加一，而对总和及平方和都没有影响。所以我们采用

$$\{1,3,4,5,9,11\} \quad 及 \quad \{0,2,6,7,8,10\},$$

两者大小都是 6，总和都是 33，平方和都是 253。因此

$$C=\{(n+1)^2,(n+3)^2,(n+4)^2,(n+5)^2,(n+9)^2,(n+11)^2\},$$
$$D=\{n^2,(n+2)^2,(n+6)^2,(n+7)^2,(n+8)^2,(n+10)^2\}$$

的元素总和都是 $6n^2+66n+253$。由于 $n>0$，这十二个平方数互不相同，所以 C 与 D 不相交，而且两者的并集是 S。

验算

- 在 (iv) 中取 $n=1$，得 $C=\{4,16,25,36,100,144\}$ 及 $D=\{1,9,49,64,81,121\}$，两者总和都是 $325=6+66+253$。
- 在 (iii) 中，总和 68 及平方和 748 分别是 1 至 16 的总和 136 及平方和 1496 的一半；立方和 9248 则是 $136^2=18496$ 的一半。
- 用电脑搜索从 $1,\ldots,8$ 中选出四个数的所有方法，确认了 (i) 中的分割在对调之下是唯一的；(iv) 的构造亦已对 n 直至 499 验证过。

常见错误

- 在 (iv) 中直接使用题目给出的 A 和 B：两者大小 6 与 5 不同，所以 n^2 项不会抵消。缺少的元素 n^2（即 $k=0$）必须归入 B。
- 在 (iii) 中平移了错误的一半：把 $\{9,12,14,15\}$（即平移后的 a_k）与 $\{1,4,6,7\}$ 放在一起，总和与平方和仍然平衡，但立方和会相差 $2\left(\sum b_k^3-\sum a_k^3\right)=2(672-624)=96$。

STEP 之外

这就是 Prouhet–Tarry–Escott 问题：把一个整数集合分成两部分，使两者的 j 次方和对 $j=1,\ldots,k$ 都相等。以 $c=16,32,\ldots$ 重复 (iii) 中“平移再对调”的做法，便得到 $\{0,1,\ldots,2^{k+1}-1\}$ 的 Thue–Morse 分割，它使直至 k 次的所有方和都平衡；其证明就

是用归纳法（induction）重复 (ii) 的二项式展开。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是学习这类初等数论（elementary number theory）的好读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。