详细解答

STEP II 2025，第 7 题

纯数学 · 非线性微分方程

STEP II 2025，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

右边的 $2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 恰好是 x^2 对 t 的导数（derivative），所以方程可以立即积分一次，得到一阶方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+C$。初始条件决定 C，而三个部分正好对应 C 的三种可能符号：零、正和负。之后每个一阶方程都可以分离变量（separation of variables），粒子的运动情况可以从公式读出，甚至直接从 x^2+C 的符号看出来。

解答

积分一次

由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right)=2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，方程即是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x^2\right),\qquad \text{所以}\qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+C$$

其中 C 为常数。在 $t=0$ 时 $x=a$，所以 C 等于初速度减去 a^2。在三个部分中，分别有 $C=0$、$C=p^2$ 及 $C=-q^2$。

第 (i) 部分

此时 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2$。只要 $x\neq 0$，速度便是正数，所以 x 从 $a>0$ 开始递增，永远不会到达 0；因此我们可以除以 x^2 并分离变量：

$$\int_a^x\frac{\mathrm{d}u}{u^2}=t\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{a}-\frac{1}{x}=t\quad\Longrightarrow\quad x=\frac{a}{1-at}.$$

当 t 从 0 增加至趋近 $\frac{1}{a}$ 时，粒子沿正方向移动，而且愈来愈快（其速度为 x^2），并且当 $t \to \frac{1}{a}$ 时 $x \to \infty$。粒子在有限时间 $\frac{1}{a}$ 内逃逸至无穷远，而解在该时刻之后并不存在。

第 (ii) 部分

现在 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 + p^2$，它恒为正数，所以可以分离变量：

$$\int_a^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2+p^2} = t \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{x}{p} - \arctan\frac{a}{p}\right) = t.$$

设 $\alpha = \arctan\dfrac{a}{p}$，由于 $a, p > 0$，它位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之内，于是

$$x = p\tan\left(pt + \alpha\right).$$

此式在 $pt + \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时成立。粒子同样沿正方向移动，速率不断增加，而当 $pt + \alpha \to \frac{\pi}{2}$ 时 $x \to \infty$，即当

$$t \to \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{a}{p}\right) = \frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a},$$

这里用到了当 $\theta > 0$ 时 $\arctan\theta + \arctan\frac{1}{\theta} = \frac{\pi}{2}$。所以粒子在有限时间内逃逸至无穷远，而且比 (i) 更早，这正符合较大初速度的预期。

第 (iii) 部分

现在

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2 - q^2 = (x-q)(x+q).$$

在 $x = \pm q$ 处速度为零，所以这两个位置是平衡点（equilibria）。$x^2 - q^2$ 的符号已经说明了一切：当 $x > q$ 时粒子向右移动，当 $-q < x < q$ 时向左移动。所以答案取决于 a 与 q 的大小比较。

利用部分分式（partial fractions）$\dfrac{1}{x^2-q^2} = \dfrac{1}{2q}\left(\dfrac{1}{x-q} - \dfrac{1}{x+q}\right)$ 分离变量：

$$\frac{1}{2q}\ln\left|\frac{x-q}{x+q}\right| = t + \text{常数}.$$

取指数，并以 $t = 0$ 时 $x = a$ 确定常数，可推想

$$\frac{x-q}{x+q} = Ke^{2qt}, \qquad K = \frac{a-q}{a+q}, \qquad \text{即} \qquad x = q\,\frac{1+Ke^{2qt}}{1-Ke^{2qt}}.$$

为确保各种情况下符号都正确，我们直接验证。设 $E = Ke^{2qt}$，则 $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 2qE$。于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = q\cdot\frac{2\,\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2}, \qquad x^2-q^2 = q^2\,\frac{(1+E)^2-(1-E)^2}{(1-E)^2} = \frac{4q^2E}{(1-E)^2},$$

两者相等。在 $t = 0$ 时，$1 + K = \frac{2a}{a+q}$ 而 $1 - K = \frac{2q}{a+q}$，所以 $x = q\cdot\frac{a}{q} = a$。因此只要 $1 - E \neq 0$，这条公式就是方程的解。注意由于 $a > 0$，有 $-1 < K < 1$。

情况 $a > q$。 此时 $0 < K < 1$，而 $E = Ke^{2qt}$ 从 K 开始递增。粒子以正速度 $a^2 - q^2$ 出发，沿正方向移动，愈来愈快。当 $e^{2qt} = \frac{1}{K}$ 时分母 $1 - E$ 达到 0，所以

$$x \to \infty \quad \text{当} \quad t \to \frac{1}{2q} \ln \frac{a+q}{a-q}.$$

与 (i) 和 (ii) 一样，粒子在有限时间内逃逸至无穷远。

情况 $a = q$。 此时 $K = 0$，对所有 t 都有 $x = q = a$。初速度为 0，加速度 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 亦然：粒子在 $x = a$ 处保持静止。

情况 $0 < a < q$。 此时 $-1 < K < 0$，所以 $E < 0$，而分母 $1 - E > 1$ 永不为零：解对所有 $t \geq 0$ 都存在。

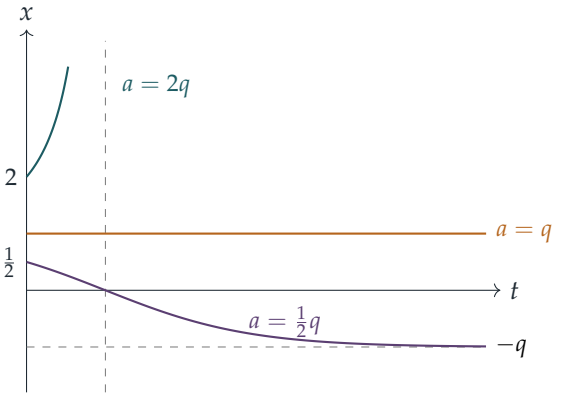
想一想 粒子会停在原点，还是穿过原点？它最终会到哪里？

初速度 $a^2 - q^2$ 为负数，所以粒子沿负方向移动。当 $E = -1$，即 $t = \frac{1}{2q} \ln \frac{q+a}{q-a}$ 时，粒子位于原点，并且直接穿过，因为该处的速度是 $-q^2 \neq 0$。当 $t \to \infty$ 时，$E \to -\infty$，而

$$x = q\,\frac{1+E}{1-E} \to -q.$$

在整个过程中 $|x| < q$（因为当 $E < 0$ 时 $\frac{1+E}{1-E} \in (-1, 1)$），所以速度 $x^2 - q^2$ 一直保持负值：粒子稳定地向左移动，趋近 $x = -q$ 但永远不会到达。它的速率 $q^2 - x^2$ 在经过原点时最大，为 q^2，之后逐渐减小至零。

以双曲函数(hyperbolic functions)表示,这些解为:当 $a > q$ 时 $x = -q \coth\left(qt - \operatorname{arcoth} \frac{a}{q}\right)$，当 $a < q$ 时 $x = -q \tanh\left(qt - \operatorname{artanh} \frac{a}{q}\right)$。下图展示 $q = 1$ 时的三种情况。



对于 $a = 2q$ 和 $a = \frac{1}{2}q$，特殊时刻 $\frac{1}{2q} \ln 3$（垂直虚线）分别是爆破时刻和穿过原点的时刻。

验算

- 在 (ii) 中令 $p \to 0$：$p\tan(pt + \arctan\frac{a}{p}) \to \frac{a}{1-at}$ 及 $\frac{1}{p}\arctan\frac{p}{a} \to \frac{1}{a}$，与 (i) 吻合。在 (iii) 中 $a > q$ 的情况下令 $q \to 0$，结果亦相同。
- 对 $x = \frac{a}{1-at}$ 求导：$\dot{x} = \frac{a^2}{(1-at)^2} = x^2$ 及 $\ddot{x} = \frac{2a^3}{(1-at)^3} = 2x\dot{x}$。
- 以数值方法逐步推进原来的二阶方程，例如取 $a = 0.5$、$q = 1.4$，得到 $t = 1$ 时 $x \approx -1.0814$，$t = 3$ 时 $x \approx -1.3987$，与公式相符；而粒子在 $t \approx 0.2669$ 时位于原点，正如预测。

常见错误

- 没有察觉 $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 是一个恰当导数，转而尝试如 $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ 配合 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 的代换；这方法可行，但较费时。
- 在 (iii) 中漏掉对数内的绝对值，以致当 $a < q$ 时得出错误的 K 符号。
- 遗漏平衡情况 $a = q$，或说粒子“停在 $-q$”，但其实它只是趋近该点。

STEP 之外

这里看到的有限时间爆破（finite-time blow-up）是非线性方程的标志：$\dot{x} = x^2$ 的右边完全光滑，但其解只在有限时间内存在，这在线性方程中从不会发生。第 (iii) 部分是相线分析（phase-line analysis）的初步：平衡点 $x = q$（不稳定）和 $x = -q$（稳定）支配着整个运动，你甚至在求解之前就可以从 $x^2 - q^2$ 的符号预测其行为。Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）讨论了这两个概念，包括解的存在性与唯一性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。