详细解答

STEP II 2025，第 6 题

纯数学 · 与抛物线相切的圆

STEP II 2025，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

这里所有圆的圆心都在 y 轴上，因此一切都关于 x 对称（symmetric），而“在两点相切”的意思就是在一对镜像点 $(\pm x_0, y_0)$ 相切，其中 $x_0 \neq 0$。要刻画相切（tangency），最简单的方法是说两者的法线（normal）一致：通往切点的半径必须沿着另一曲线在该点的法线方向。一旦第 (i) 和第 (ii) 部分各自给出以圆心高度 a 表示 r^2 的公式，第 (iii) 部分就变成研究一条关于 a 的二次方程（quadratic equation），而它的两个根（roots）正是 a_1 和 a_2。

解答

第 (i) 部分

设圆与抛物线（parabola）相切于 $P = (x_0, y_0)$，其中 $x_0 \neq 0$。（两个不同的切点不可能都在对称轴上，因为抛物线与 $x = 0$ 只相交于原点；而且由对称性，若 (x_0, y_0) 是切点，则 $(-x_0, y_0)$ 也是。）

圆在 P 的法线沿着半径方向 $(x_0,\ y_0 - a)$。把抛物线写成 $2ky - x^2 = 0$，它的法线沿着梯度（gradient）方向 $(-2x_0,\ 2k)$。相切即表示这两个向量平行：

$$x_0 \cdot 2k - (y_0 - a)(-2x_0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x_0\,(k + y_0 - a) = 0.$$

由于 $x_0 \neq 0$，得 $y_0 = a - k$。由于 P 在抛物线上，$x_0^2 = 2ky_0 = 2k(a - k)$；又由于 P 在圆上，故

$$r^2 = x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a - k) + k^2 = k(2a - k),$$

得证。

反过来，设 $a > k > 0$ 且 $r^2 = k(2a-k)$。令 $y_0 = a - k > 0$ 及 $x_0 = \sqrt{2k(a-k)} > 0$。按构造，$(\pm x_0, y_0)$ 都在抛物线上；又因 $x_0^2 + (y_0 - a)^2 = 2k(a-k) + k^2 = r^2$，它们也在圆上。在这两点，法线 $(\pm x_0, -k)$ 与 $(\mp 2x_0, 2k)$ 平行，所以两曲线在该处有公共切线。由于 $x_0 \neq 0$，圆与抛物线在两个不同的点相切。

（作为交叉验证，把 $x^2 = 2ky$ 代入圆的方程，得 $y^2 - 2(a-k)y + (a-k)^2 = 0$，即 $(y - (a-k))^2 = 0$：这是一个重根（repeated root），正是相切在代数上的标志。）

第 (ii) 部分

直线 $y = c + x$，即 $x - y + c = 0$，与圆相切当且仅当它与圆心 $(0, a)$ 的距离等于 r：

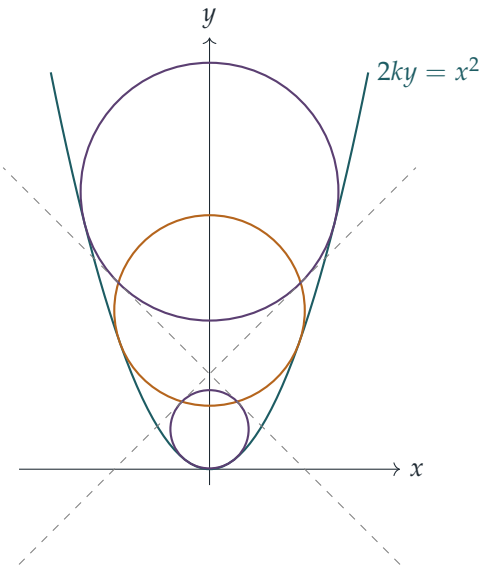
$$r = \frac{|0 - a + c|}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad r^2 = \frac{(a-c)^2}{2}.$$

直线 $y = c - x$ 是它关于 y 轴的镜像，所以给出相同的条件。

切点就是从 $(0, a)$ 到直线的垂足（foot of the perpendicular）。半径垂直于直线，故方向为 $(1, -1)$；从 $(0, a)$ 移动 $t(1, -1)$ 而落在 $y = c + x$ 上，得 $a - t = c + t$，所以 $t = \frac{a-c}{2}$。与 $y = c + x$ 的切点是

$$\left(\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right),$$

而由对称性，与 $y = c - x$ 的切点是 $\left(-\tfrac{a-c}{2},\ \tfrac{a+c}{2}\right)$。



$k = 1$、$c = 3$ 的情况：抛物线、与它相切的两个圆 C_1、C_2（紫红色）、直线 $y = 3 \pm x$（虚线），以及第 $(iii)(b)$ 部分的圆（琥珀色）。

第 (iii)(a) 部分

每个圆都与抛物线在两点相切，所以由第 (i) 部分，$r_i^2 = k(2a_i - k)$；每个圆又与直线 $y = c \pm x$ 相切，所以由第 (ii) 部分，$r_i^2 = \frac{1}{2}(a_i - c)^2$。两式相等，得

$$(a_i - c)^2 = 2k(2a_i - k) \quad \Longrightarrow \quad a_i^2 - 2(c + 2k)\, a_i + c^2 + 2k^2 = 0.$$

所以 a_1 和 a_2 都满足二次方程 $a^2 - 2(c+2k)a + c^2 + 2k^2 = 0$。由于 $a_1 \neq a_2$，它们正是这方程的两个根，因此

$$a_1 + a_2 = 2c + 4k, \qquad a_1 a_2 = c^2 + 2k^2.$$

于是

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= (a_1 + a_2)^2 - 2a_1 a_2 \\ &= 4c^2 + 16kc + 16k^2 - 2c^2 - 4k^2 \\ &= 2c^2 + 16kc + 12k^2, \end{aligned}$$

(a) 得证。

第 (iii)(b) 部分

由第 (ii) 部分，C_i 上的切点是 $(\pm\frac{a_i - c}{2},\ \frac{a_i + c}{2})$。记 $u_i = a_i - c$ 会更整洁，这样切点就是 $(\pm\frac{u_i}{2},\ c + \frac{u_i}{2})$。

> **想一想** 我们需要一个经过四点的圆，但只有 d 和 p 两个未知数。怎样才能在不明确解出 a_1 和 a_2 的情况下确定它们?

这四点是两对镜像点，而任何圆心在 y 轴上的圆都是对称的，所以只需令圆经过 $u = u_1$ 及 $u = u_2$ 时的点 $(\frac{u}{2}, c + \frac{u}{2})$ 即可。这条件是

$$\frac{u^2}{4} + \left(c - d + \frac{u}{2}\right)^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 + 2(c-d)\, u + 2(c-d)^2 - 2p^2 = 0. \qquad (*)$$

另一方面，把 $a = u + c$ 代入 (a) 中的二次方程，得

$$u^2 - 4k\, u + 2k^2 - 4kc = 0, \qquad (**)$$

它的根恰好是 u_1 和 u_2，而由于 $a_1 \neq a_2$，这两个根不相等。圆经过全部四点，当且仅当 u_1 和 u_2 都是 $(*)$ 的根。两个具有相同两个相异根的首一（monic）二次多项式必然相同，所以与 $(**)$ 比较系数:

$$2(c - d) = -4k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k,$$

然后 $2(c-d)^2 - 2p^2 = 8k^2 - 2p^2 = 2k^2 - 4kc$，所以

$$p^2 = 3k^2 + 2kc = k(3k + 2c).$$

第 (iii)(c) 部分

我们使用第 (i) 部分的逆命题（converse）。当 $d = c + 2k$ 时，

$$k(2d - k) = k(2c + 3k) = p^2,$$

所以这个圆正好具有 $r^2 = k(2a - k)$ 的形式，只是以 d 代替 a。剩下要验证的是 $d > k$。

> **想一想** (a) 和 (b) 都没有提及任何不等式，那么像 $d > k$ 这样的不等式（inequality）从何而来?

它来自 C_1 和 C_2 确实与抛物线在两点相切这一事实。在第 (i) 部分，在两点相切迫使切点满足 $y_0 = a - k$ 且 $x_0^2 = 2k(a - k) > 0$（因为 $x_0 \neq 0$），所以 $a_1 > k$ 且 $a_2 > k$。把两式相加并利用 (a)，

$$2c + 4k = a_1 + a_2 > 2k \quad \Longrightarrow \quad c > -k \quad \Longrightarrow \quad d = c + 2k > k.$$

所以 $d > k > 0$ 且 $p^2 = k(2d - k)$，由第 (i) 部分的后半，圆 $x^2 + (y - d)^2 = p^2$ 与抛物线 $2ky = x^2$ 在两点相切，即 $(\pm\sqrt{2k(c + k)},\, c + k)$。

验算

取 $k = 1$、$c = 3$(即上图)。(a) 中的二次方程是 $a^2 - 10a + 11 = 0$,所以 $a = 5 \pm \sqrt{14} \approx 8.742$ 及 1.258。两者之和为 $10 = 2c + 4k$，平方和为 $78 = 2 \cdot 9 + 16 \cdot 3 + 12$。(b) 给出 $d = 5$ 及 $p^2 = 9$。圆 $x^2 + (y - 5)^2 = 9$ 与 $2y = x^2$ 相交于 $2y + (y - 5)^2 = 9$，即 $(y - 4)^2 = 0$: 在 $y = 4$ 有重根，所以两者相切于 $(\pm 2\sqrt{2}, 4)$，与 (c) 的预测一致。四个切点中的每一个，例如 $(\frac{\sqrt{14}+2}{2}, \frac{\sqrt{14}+8}{2})$，与 $(0, 5)$ 的距离都是 3。所有结果也已用电脑对数以百计随机选取的容许 k 和 c 值验证过。

常见错误

- 在 (i) 中，忘记切点满足 $x_0 \neq 0$。正是这一点让我们可以除以 x_0，也正是它给出 $a > k$。
- 在 (iii)(a) 中，只用了 $r^2 = k(2a - k)$ 或只用了 $r^2 = \frac{1}{2}(a - c)^2$。关于 a 的二次方程来自两者同时成立。
- 在 (iii)(c) 中，验证了 $p^2 = k(2d - k)$ 却没有验证 $d > k$。没有这一点，这个“圆”可能只在原点相切，甚至完全不相切。

STEP 之外

由第 (i) 部分，圆心在 y 轴上且与抛物线两度相切的圆是 $x^2 + y^2 - k^2 - 2a(y - k) = 0$：一条关于参数 a 为线性的方程。这样的一族圆称为圆束（pencil of circles，又称共轴圆系（coaxal system）），而 C_1、C_2 以及 (b) 中的圆都属于这一族。比对法线是迈向曲线之间接触（contact）这一概念的第一步；与曲线达到二阶接触的圆就是它的曲率圆（circle of curvature），这会在曲线微分几何（differential geometry of curves）的入门课程中遇到。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）收录了许多同一风格、STEP 式的坐标几何题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。