详细解答

STEP II 2025，第 5 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 2025，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

这里每个积分（integral）的范围都是由 0 到 ∞，而形如 $x = u^{-m}$ 的代换（substitution）会把 $[0, \infty)$ 映射到自身，只是两端互换了。$\mathrm{d}x$ 带来的负号会抵消上下限的互换，所以我们得到的仍然是一个在 $[0, \infty)$ 上的积分。如果新的被积函数（integrand）正好是原来的负数，那么这个积分等于它自己的相反数，因此为零。如果新的被积函数是另一个形状相同的被积函数的倍数，我们就得到两个积分之间的关系，而毋须计算任何一个积分。在第 (iii) 及第 (iv) 部分，我们把指数（exponent）保留为一般形式，再选取它的值，使 u 的幂互相抵消。

解答

在整个解答中，若 $x = u^{-m}$ 且 $m > 0$，则当 $u \to \infty$ 时 $x \to 0$，而当 $u \to 0$ 时 $x \to \infty$，所以

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\infty^0 f(u^{-m})\,(-mu^{-m-1})\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty f(u^{-m})\,mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u.$$

我们会先在 $m = 1$ 及 $m = 2$ 的情况下使用这个结果，然后再用于一般的 m。

第 (i) 部分

把该积分记为 I，并设 $x = u^{-1}$；把上下限重新排好次序后，$\mathrm{d}x \to u^{-2}\,\mathrm{d}u$。对 $u > 0$，

$$x(x^3+1) = \frac{1}{u}\cdot\frac{1+u^3}{u^3} = \frac{u^3+1}{u^4}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{x(x^3+1)} = \frac{\sqrt{u^3+1}}{u^2},$$

而且

$$\sqrt{x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{u}} - 1 = \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}.$$

因此

$$I = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \cdot \frac{u^2}{\sqrt{u^3+1}} \cdot \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\infty \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u$$
$$= -\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}-1}{\sqrt{u(u^3+1)}}\,\mathrm{d}u = -I.$$

由于变量叫甚么名字并不重要，最后那个积分其实又是 I。所以 $2I = 0$，得 $I = 0$，正如所求。

注意，这并不表示被积函数为零。它在 $(0,1)$ 上是负的，在 $(1,\infty)$ 上是正的，而代换令这两部分面积恰好互相抵消。

第 (ii) 部分

现在设 $x = u^{-2}$；重新排好上下限后，$\mathrm{d}x \to 2u^{-3}\,\mathrm{d}u$。对 $u > 0$，

$$x^3+1 = u^{-6}+1 = \frac{1+u^6}{u^6}, \qquad \sqrt{x^3+1} = \frac{\sqrt{u^6+1}}{u^3}.$$

因此

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}} = \int_0^\infty \frac{u^3}{\sqrt{u^6+1}} \cdot \frac{2}{u^3}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^6+1}},$$

把 u 改名为 x 后，这就是所求的结果。

第 (iii) 部分

第 (i) 部分是 $s = 1$、$p = 3$、$r = \frac{1}{2}$ 的情况，所以我们用字母重复同一方法。把该积分记为 J，并设 $x = u^{-1}$：

$$x^s(x^p+1) = u^{-s} \cdot \frac{1+u^p}{u^p} = \frac{u^p+1}{u^{s+p}}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{x^s(x^p+1)} = u^{-(s+p)/2}\sqrt{u^p+1},$$

同时 $x^r - 1 = (1-u^r)/u^r$。所以

$$J = \int_0^\infty \frac{(1-u^r)\,u^{-r}\,u^{(s+p)/2}\,u^{-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u = -\int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{(s+p)/2-r-2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

把它与写成以下形式的 J 本身比较：

$$J = \int_0^\infty \frac{(u^r-1)\,u^{-s/2}}{\sqrt{u^p+1}}\,\mathrm{d}u.$$

> ? **想一想** 为甚么只需令 u 的幂相符，而不用计算任何东西?

如果两个 u 的幂相同，代换就会把 J 变成 $-J$，于是正如第 (i) 部分一样得 $J = 0$。所以我们需要

$$\frac{s+p}{2} - r - 2 = -\frac{s}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad r = s + \frac{p}{2} - 2.$$

取这个 r 值，便有 $J=-J$，所以 $J=0$。（题目告诉我们 p 和 s 使这些积分收敛（converge），而论证 $J=-J\Rightarrow J=0$ 所需要的就只是这一点。）验算一下：$s=1$ 和 $p=3$ 给出 $r=1+\frac{3}{2}-2=\frac{1}{2}$，这正是第 (i) 部分。

第 (iv) 部分

第 (ii) 部分是 $k=2$、$p=3$、$q=6$ 的情况，而它来自 $x=u^{-2}$。所以我们尝试 $x=u^{-m}$，其中 $m>0$，使 $\mathrm{d}x\to mu^{-m-1}\,\mathrm{d}u$：由于 $x^p+1=(1+u^{mp})/u^{mp}$，

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p+1}} = m\int_0^\infty \frac{u^{mp/2}\,u^{-m-1}}{\sqrt{u^{mp}+1}}\,\mathrm{d}u.$$

多出来的 u 的幂会在以下情况消失：

$$\frac{mp}{2}=m+1 \quad\Longleftrightarrow\quad p=2+\frac{2}{m},$$

此时右方为 $m\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^q+1}}$，其中 $q=mp=2m+2$。

现在取 $m=k$。对任何 $k>0$，选取

$$p=2+\frac{2}{k},\qquad q=2k+2$$

便得到

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^p+1}} = k\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^q+1}}.$$

由于 $k>0$，两个指数都大于 2。这正是这些积分收敛的条件，因为当 x 很大时，被积函数的表现与 $x^{-p/2}$ 相若。所以我们的关系式中的积分都存在。取 $k=2$ 便重新得到第 (ii) 部分的 $p=3$、$q=6$，而 $k=1$ 则给出平凡情况 $p=q=4$。

验算

- 数值上，$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}\approx 2.8044$，而 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}}\approx 1.4022$，恰好是一半，与第 (ii) 部分所说的一致。
- 第 (i) 部分的积分在机器精度内计算出来为零，尽管负的贡献主要来自 $x=0$ 附近，而正的贡献则稀疏地分布在 $(1,\infty)$ 上。
- 对随机选取的容许 p 和 s，以电脑验算第 (iii) 部分的积分，在 $r=s+\frac{p}{2}-2$ 时得到零。把 r 改变 0.3，则得到明显非零的值。
- 对 $k=\frac{1}{2}$（即 $p=6$、$q=3$），第 (iv) 部分的关系式就是把第 (ii) 部分倒过来读，理应如此。

常见错误

- 忘记代换会互换上下限。$\mathrm{d}x$ 带来的负号与倒转的上下限互相抵消，漏掉其中任何一个，都会令第 (i) 部分的符号出错。
- 在第 (iii) 部分处理一般的幂时，写成 $\sqrt{u^{-s}} = u^{-s}/2$，而不是 $u^{-s/2}$。
- 在第 (iv) 部分，只对某个特定的 k 找出一对 (p,q)，而不是把 p 和 q 写成适用于每个 $k > 0$ 的函数。

STEP 之外

这些积分全都可以求出闭式（closed form）。代换 $t = x^p/(1+x^p)$ 会把 $\int_0^\infty (1+x^p)^{-1/2}\,\mathrm{d}x$ 变成 $\frac{1}{p}\,\mathrm{B}\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$，其中 B 是欧拉（Euler）的 Beta 函数（Beta function）。再配合 Gamma 函数（Gamma function），就可以明确写出第 (iv) 部分中的比值。利用对称 $x \mapsto 1/x$ 把一个积分变成它自己的相反数，这个技巧在分析（analysis）和围道积分（contour integration）中一再出现。若想仔细学习反常积分（improper integrals），包括我们在此可以略过的收敛问题，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。若想看更多 STEP 风格的代换技巧，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。