详细解答

STEP II 2025，第 4 题

纯数学 · 下取整函数恒等式

STEP II 2025，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

一切都建基于一个事实：$\lfloor x \rfloor = m$ 的意思恰恰是 m 为整数，且 $m \leq x < m+1$。第 (i) 部分说明，整数平移可以直接穿过下取整函数（floor function）。有了这一点，便会发现 f_n 是以 $\frac{1}{n}$ 为周期的周期函数（periodic function），因此我们只需在一个短区间上研究它，而在该区间上每一项都很容易计算。第 (iii) 部分其实是 $n = 2$ 的情况换了个样子出现，它使无穷级数可以伸缩相消（telescope）。

解答

第 (i) 部分

设 $m = \lfloor x \rfloor$，则 m 为整数，且 $m \leq x < m+1$。各边加上整数 n，得

$$m + n \leq x + n < (m + n) + 1.$$

由于 $m+n$ 是整数，它就是不超过 $x+n$ 的最大整数。所以 $\lfloor x+n \rfloor = m+n = \lfloor x \rfloor + n$，得证。

第 (ii)(a) 部分

记 $\mathrm{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \lfloor x + \frac{k}{n} \rfloor - \lfloor nx \rfloor$。把 x 换成 $x + \frac{1}{n}$，和式中每一项都会向后移一位：

$$\mathrm{f}_n\left(x + \tfrac{1}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor x + \tfrac{k}{n} \right\rfloor - \lfloor nx + 1 \rfloor.$$

和式的最后一项是 $\lfloor x+1\rfloor = \lfloor x\rfloor + 1$，而 $\lfloor nx+1\rfloor = \lfloor nx\rfloor + 1$，两者都由第 (i) 部分取 $n=1$ 得出。所以

$$\mathrm{f}_n\left(x+\tfrac{1}{n}\right) = \lfloor x\rfloor + 1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left\lfloor x+\tfrac{k}{n}\right\rfloor - \lfloor nx\rfloor - 1 = \mathrm{f}_n(x).$$

第 (ii)(b) 部分

设 $0 \le t < \frac{1}{n}$。对于 $0 \le k \le n-1$，

$$0 \le t + \tfrac{k}{n} < \tfrac{1}{n} + \tfrac{n-1}{n} = 1,$$

因此 $\lfloor t+\frac{k}{n}\rfloor = 0$。此外 $0 \le nt < 1$，所以 $\lfloor nt\rfloor = 0$。每一项都是零，因此 $\mathrm{f}_n(t) = 0$。

第 (ii)(c) 部分

> **想一想** (a) 部分只让我们每次向上移 $\frac{1}{n}$。那么，位于 $[0, \frac{1}{n})$ 下方的 x 要怎样才能到达?

在点 $x-\frac{1}{n}$ 应用 (a)，得 $\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n(x-\frac{1}{n})$，所以我们既可以向上移，也可以向下移。由归纳法（induction），对每个整数 m（无论正负），都有 $\mathrm{f}_n(x+\frac{m}{n}) = \mathrm{f}_n(x)$。

现在任取实数 x，并设 $m = \lfloor nx\rfloor$，则 $m \le nx < m+1$。令 $t = x - \frac{m}{n}$。各边除以 $n > 0$，得 $0 \le t < \frac{1}{n}$。因此由 (b)，

$$\mathrm{f}_n(x) = \mathrm{f}_n\left(t+\tfrac{m}{n}\right) = \mathrm{f}_n(t) = 0$$

成立。所以对所有 x 都有 $\mathrm{f}_n(x) = 0$，这就是恒等式

$$\lfloor x\rfloor + \left\lfloor x+\tfrac{1}{n}\right\rfloor + \cdots + \left\lfloor x+\tfrac{n-1}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor.$$

第 (iii)(a) 部分

在 (ii)(c) 中取 $n=2$，并在 $\frac{x}{2}$ 处求值：

$$0 = \mathrm{f}_2\left(\tfrac{x}{2}\right) = \left\lfloor \tfrac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \tfrac{x}{2}+\tfrac{1}{2}\right\rfloor - \left\lfloor 2\cdot\tfrac{x}{2}\right\rfloor,$$

移项整理即得 $\lfloor \frac{x}{2}\rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2}\rfloor = \lfloor x\rfloor$。

第 (iii)(b) 部分

想一想 (iii)(a) 里只有一个孤零零的 $+1$，它怎样帮助我们处理 $\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ 这一项?

把分子和分母同时除以 2^k。设 $y = x/2^k$，则

$$\left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y+1}{2} \right\rfloor = \lfloor y \rfloor - \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{k+1}} \right\rfloor,$$

这里用了 (iii)(a)，并以 y 代替 x。所以 $k = 0, 1, \ldots, K$ 各项之和会伸缩相消:

$$S_K = \sum_{k=0}^{K} \left\lfloor \frac{x+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor - \left\lfloor \frac{x}{2^{K+1}} \right\rfloor.$$

当 $K \to \infty$ 时，$x/2^{K+1} \to 0$，而答案取决于它从 0 的哪一侧趋近。

- 若 $x \geq 0$: 一旦 $2^{K+1} > x$，便有 $0 \leq x/2^{K+1} < 1$，所以最后的取整值为 0，此后 $S_K = \lfloor x \rfloor$。
- 若 $x < 0$: 一旦 $2^{K+1} \geq -x$，便有 $-1 \leq x/2^{K+1} < 0$，所以最后的取整值为 -1，此后 $S_K = \lfloor x \rfloor + 1$。

无论哪种情况，都只有有限多项不为零，因此该无穷级数为

$$\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{2^2} \right\rfloor + \cdots = \begin{cases} \lfloor x \rfloor, & x \geq 0, \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x < 0. \end{cases}$$

当 x 为非负整数时，和就是 x。

验算

试取 $x = 7$。各项为 $\lfloor 4 \rfloor = 4$、$\lfloor \frac{9}{4} \rfloor = 2$、$\lfloor \frac{11}{8} \rfloor = 1$、$\lfloor \frac{15}{16} \rfloor = 0$，之后每一项都是 0。它们的和是 $7 = \lfloor 7 \rfloor$。再试 $x = -\frac{5}{2}$: 各项为 $\lfloor -\frac{3}{4} \rfloor = -1$、$\lfloor -\frac{1}{8} \rfloor = -1$、$\lfloor \frac{3}{16} \rfloor = 0$，如此类推。和为 $-2 = \lfloor -\frac{5}{2} \rfloor + 1$，证实负数的情况确实不同。至于 (ii)，取 $n = 3$、$x = 1.5$，得 $1 + 1 + 2 = 4 = \lfloor 4.5 \rfloor$。用电脑对两万个随机有理数 x 及 $1 \leq n \leq 30$ 的各个值作检验，题中每一条恒等式以及伸缩相消后的部分和都得到证实。

常见错误

- 在 (ii)(c) 中只用 (a) 向上移，这样只涵盖了 $x \geq 0$，对负数 x 则甚么也没有说明。
- 在 (iii)(b) 中假设对所有 x 都有 $\lfloor x/2^{K+1} \rfloor \to 0$。对于负数 x，它最终停留在 -1，而不是 0。

- 在 a 和 b 都不是整数时写 $\lfloor a+b \rfloor = \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor$。第 (i) 部分正正就是容许这样写的情况。

STEP 之外

(ii)(c) 中的恒等式就是埃尔米特恒等式（Hermite's identity）。它属于一系列在初等数论（elementary number theory）中占核心地位的取整函数结果，例如勒让德（Legendre）公式 $\sum_{k\geq 1}\lfloor N/p^k \rfloor$，它给出整除 $N!$ 的质数 p 的最高次幂。(iii)(b) 中的和也在数算某样东西：对正整数 x，第 k 项就是从 1 到 x 之间能被 2^k 整除但不能被 2^{k+1} 整除的整数个数，而每个整数都恰好被数一次。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（《高等算术》）是观察这些思想如何实际运用的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。