详细解答

STEP II 2025，第 3 题

纯数学 · 幂的比较

STEP II 2025，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

每个形如 a^b 与 b^a 的比较（其中 $a, b > 0$），在取对数（logarithm）并除以 ab 之后，都会变成 $\frac{\ln a}{a}$ 与 $\frac{\ln b}{b}$ 的比较。因此一切都归结到 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的图像：它上升至 $x = \mathrm{e}$ 处的唯一峰值，然后下降。位于 e 同一侧的两个数很容易比较；位于两侧的两个数则需要一块“踏脚石”，例如 $f(2) = f(4)$ 这个巧妙的巧合。

解答

全文中，对 $x > 0$ 记 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$。由于 ln 是递增的，对正数 a, b 有

$$a^b > b^a \iff b\ln a > a\ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b} \iff f(a) > f(b),$$

其中我们除以了 $ab > 0$。每一部分都会用到这个转换。

第 (i) 部分

由商法则（quotient rule），

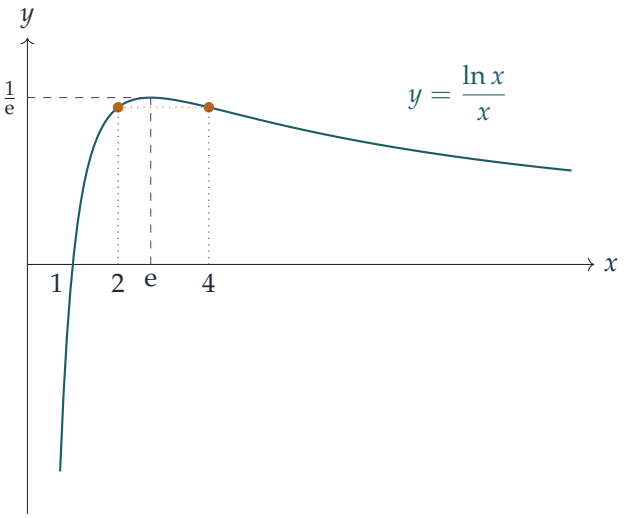
$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

它在 $0 < x < \mathrm{e}$ 时为正，在 $x > \mathrm{e}$ 时为负。因此 f 在 $(0, \mathrm{e}]$ 上严格递增（strictly increasing），在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上严格递减，最大值为 $f(\mathrm{e}) = 1/\mathrm{e}$。

其他特征：

- $f(1) = 0$；在 $(0,1)$ 上 $f < 0$，在 $(1, \infty)$ 上 $f > 0$。

- 当 $x \to 0^+$ 时，$\ln x \to -\infty$ 而 $1/x \to +\infty$，故 $f(x) \to -\infty$：y 轴是一条渐近线（asymptote）。
- 当 $x \to \infty$ 时，由于 $\ln x$ 的增长比 x 慢，$f(x) \to 0^+$：x 轴是一条渐近线。
- 再求导一次得 $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$，因此在 $x = \mathrm{e}^{3/2} \approx 4.48$ 处有一个拐点（point of inflection）。



琥珀色的点标示 $f(2) = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2\ln 2}{4} = f(4)$，我们将在第 (iii) 部分用到。

第 (ii) 部分

(a) 由上述转换，$3^\pi > \pi^3 \iff f(3) > f(\pi)$。3 与 π 都大于 e，而 f 在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上严格递减；由于 $3 < \pi$，得 $f(3) > f(\pi)$，故 $3^\pi > \pi^3$。

(b) 这里的不等式是 $\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} > \sqrt{5}^{9/4}$，它等价于 $f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$。现在两个数都小于 e：事实上 $\sqrt{5} < \frac{9}{4} = 2.25 < \mathrm{e}$，其中 $\sqrt{5} < \frac{9}{4}$ 是因为 $5 < \frac{81}{16}$。在 $(0, \mathrm{e}]$ 上函数 f 严格递增，所以较大的输入给出较大的值：$f\left(\frac{9}{4}\right) > f(\sqrt{5})$，得证。

第 (iii) 部分

取 $a = x$ 及 $b = x + 2$，转换给出

$$x^{x+2} > (x+2)^x \iff f(x) > f(x+2).$$

对于 $1 < x < 2$，有 $x \in (1,2)$ 及 $x + 2 \in (3,4)$，两者分处 e 的两侧，因此我们需要一块踏脚石。

想一想 怎样比较 f 在 e 左边某点的值与 f 在其右边某点的值?

利用穿过两个琥珀色点的水平线。由于 $1 < x < 2 < \mathrm{e}$ 且 f 在该处递增，$f(x) < f(2)$。由于 $\mathrm{e} < x+2 < 4$ 且 f 在该处递减，$f(x+2) > f(4)$。又 $f(2) = f(4)$，因此

$$f(x) < f(2) = f(4) < f(x+2).$$

故 $f(x) < f(x+2)$，所以 $(x+2)^x$ 较大：对 $(1,2)$ 中的每个 x，都有 $(x+2)^x > x^{x+2}$。

第 (iv) 部分

把第一个不等式的两边分别改写为 3 的幂和 $2\sqrt{2}$ 的幂：

$$9^{\sqrt{2}} = \left(3^2\right)^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2}^{9} = \left(\sqrt{2}^{3}\right)^{3} = \left(2\sqrt{2}\right)^{3}.$$

因此两个不等式的左边完全相同，右边也完全相同；它们是同一个命题，因此等价。

由转换，$3^{2\sqrt{2}} > (2\sqrt{2})^3 \iff f(3) > f(2\sqrt{2})$。由 $\mathrm{e}^2 < 8$ 得 $\mathrm{e} < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$（取正平方根），又由于 $8 < 9$，有 $2\sqrt{2} < 3$。因此

$$\mathrm{e} < 2\sqrt{2} < 3,$$

而由于 f 在 $[\mathrm{e}, \infty)$ 上严格递减，$f(2\sqrt{2}) > f(3)$。所以 $(2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}}$，即

$$\sqrt{2}^{9} > 9^{\sqrt{2}}: \quad \text{较大的是} \sqrt{2}^{9}.$$

第 (v) 部分

设 $a = \sqrt[3]{3}$。我们要比较 8^a 与 a^8，即比较 $f(8)$ 与 $f(a)$。由于 $a < 2 < \mathrm{e} < 8$，两个输入再次位于峰值的两侧，而且它们的值原来很接近（$f(a) \approx 0.254$，$f(8) \approx 0.260$），因此我们需要比第 (iii) 部分的技巧更精细的方法。

想一想 能否用 f 在较简单的点上的值来表示 $f(a)$ 及 $f(8)$?

有用的恒等式是 $f(x^k) = \dfrac{k \ln x}{x^k}$。它给出

$$f(a) = \frac{\frac{1}{3}\ln 3}{a} = \frac{f(3)}{a}, \qquad f(8) = \frac{3\ln 2}{8} = \frac{3}{4} f(2), \qquad f(2\sqrt{2}) = \frac{\frac{3}{2}\ln 2}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} f(2).$$

由第 (iv) 部分，$f(3) < f(2\sqrt{2})$。两边除以 $a > 0$，

$$f(a) = \frac{f(3)}{a} < \frac{f(2\sqrt{2})}{a} = \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}\,a}.$$

最后，$a = 3^{1/3} > 2^{1/2} = \sqrt{2}$，因为把两边同时取六次方得 $9 > 8$。因此 $2\sqrt{2}a > 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 4$，又由于 $f(2) > 0$，

$$f(a) < \frac{3f(2)}{2\sqrt{2}a} < \frac{3f(2)}{4} = f(8).$$

所以 $f(8) > f(a)$，由转换即 $8^a > a^8$：较大的是 $8^{\sqrt[3]{3}}$。

验算

数值上，$3^\pi \approx 31.54$ 对 $\pi^3 \approx 31.01$；$\left(\frac{9}{4}\right)^{\sqrt{5}} \approx 6.131$ 对 $\sqrt{5}^{9/4} \approx 6.114$；在 $x = 1.5$ 时，$1.5^{3.5} \approx 4.13$ 对 $3.5^{1.5} \approx 6.55$；$9^{\sqrt{2}} \approx 22.36$ 对 $\sqrt{2}^9 \approx 22.63$；以及 $8^{\sqrt[3]{3}} \approx 20.07$ 对 $\sqrt[3]{3}^8 \approx 18.72$。全部与上述结论一致。在 (ii) 和 (iv) 中差距很小，这正是需要用图像论证而非粗略估算的原因。用电脑在 $(1,2)$ 中 10^5 个随机点检验第 (iii) 部分，没有发现任何例外。

常见错误

- 比较 f 在 e 两侧的两点时，当作 f 是单调（monotonic）的那样处理。在 (iii) 和 (v) 中，踏脚石是必不可少的。
- 忘记把 $b\ln a > a\ln b$ 除以 ab 时不等号方向不变，只是因为 $ab > 0$。
- 在 (ii)(b) 中，没有说明 $\frac{9}{4}$ 与 $\sqrt{5}$ 哪个较大，或没有说明两者都小于 e。

STEP 之外

方程 $a^b = b^a$ 在 $a \neq b$ 时正正就是 $f(a) = f(b)$，而每条水平线 $y = c$（其中 $0 < c < 1/\mathrm{e}$）都与图像相交两次。其中 $a < b$ 的解可参数化为 $a = (1 + \frac{1}{t})^t$、$b = (1 + \frac{1}{t})^{t+1}$，其中 $t > 0$；取 $t = 1$ 得 $(2,4)$，这是唯一一对这样的正整数。当 $t \to \infty$ 时两者都趋向 e，这是大学一年级分析（analysis）中的标准极限之一。关于这类论证背后的单调性与均值定理（mean value theorem）的严谨处理，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。