详细解答

STEP II 2025，第 2 题

纯数学 · 含模的复数方程

STEP II 2025，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

关键思路

设 $z = x + \mathrm{i}y$，然后把方程拆成实部（real part）和虚部（imaginary part）。模（modulus）必定是实数，所以它对虚部毫无贡献；而 z^2（或 z^3）的虚部随即可以因式分解。这个因式分解告诉我们，根必定落在阿根图（Argand diagram）中的哪几条直线上；在每条直线上，问题就化为一个单变量的实方程。

解答

第 (i) 部分

(a) 设 $z = x + \mathrm{i}y$，其中 x, y 为实数。于是 $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\,\mathrm{i}$，而 $|z + b|$ 是实数，a 亦然。比较 $z^2 + |z + b| = a$ 两边的虚部，得

$$2xy = 0,$$

所以 $x = 0$（此时 z 为纯虚数（purely imaginary））或 $y = 0$（此时 z 为纯实数）。这正是所要证明的。

(b) 假设 $z = \mathrm{i}y$，其中 y 为实数。那么 $z^2 = -y^2$，且 $|z + \frac{5}{2}| = \sqrt{y^2 + \frac{25}{4}}$，因此需要

$$\sqrt{y^2 + \tfrac{25}{4}} = y^2 + \tfrac{7}{2}.$$

两边皆为正数，所以这等价于平方后的方程

$$y^2 + \tfrac{25}{4} = y^4 + 7y^2 + \tfrac{49}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad y^4 + 6y^2 + 6 = 0.$$

对任何实数 y，左边至少为 6，所以无解：方程没有纯虚根。

(c) 假设 $z = x$ 为实数，则需要 $x^2 + |x + \frac{7}{2}| = \frac{5}{2}$。我们按 $x + \frac{7}{2}$ 的正负号分情况讨论。

- 若 $x \geq -\frac{7}{2}$：$x^2 + x + \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$，即 $x^2 + x + 1 = 0$，其判别式（discriminant）为 $1 - 4 = -3 < 0$。没有实数解。
- 若 $x < -\frac{7}{2}$：$x^2 - x - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}$，即 $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$。根 3 和 -2 都不满足条件 $x < -\frac{7}{2}$，所以两者都不是解。

因此方程没有纯实根。

> **想一想** 为甚么解出 $x^2 - x - 6 = 0$ 就停下来是不够的?

每种情况只在其各自的 x 范围内描述原方程。若情况方程的某个根落在该范围之外，它解的其实是另一条方程（模内符号错了的那条），所以必须舍去。

(d) 现在 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$；特别地，$b > 0$。

*虚根。*设 $z = \mathrm{i}y$，并记 $Y = y^2 \geq 0$。方程变为 $-Y + \sqrt{Y + b^2} = \frac{1}{2}$，即

$$\sqrt{Y + b^2} = Y + \tfrac{1}{2}.$$

当 $Y \geq 0$ 时右边为正，所以平方后得到等价的方程：

$$Y + b^2 = Y^2 + Y + \tfrac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad Y^2 = b^2 - \tfrac{1}{4}.$$

由于 $b > \frac{1}{2}$，有 $b^2 - \frac{1}{4} > 0$，所以 $Y = \sqrt{b^2 - \frac{1}{4}}$ 确实是一个正值，于是

$$z = \pm \mathrm{i} \left(b^2 - \tfrac{1}{4}\right)^{1/4}$$

是纯虚根。

*实根。*设 $z = x$，并寻找满足 $x \geq -b$ 的根，此时 $|x + b| = x + b$。方程变为

$$x^2 + x + b - \tfrac{1}{2} = 0,$$

其判别式为 $1 - 4(b - \frac{1}{2}) = 3 - 4b$，由于 $b < \frac{3}{4}$，它是正数。取较大的根

$$x_+ = \frac{-1 + \sqrt{3 - 4b}}{2}.$$

我们必须验证它落在范围 $x \geq -b$ 之内。$x_+ \geq -b$ 等价于 $\sqrt{3 - 4b} \geq 1 - 2b$，而这必然成立，因为 $b > \frac{1}{2}$ 使右边为负，而左边为正。所以 x_+ 是一个纯实根。

因此当 $\frac{1}{2} < b < \frac{3}{4}$ 时，方程至少有一个纯虚根和至少一个纯实根，得证。（关于 b 的每个条件都恰好派上用场：$b > \frac{1}{2}$ 用于虚根及 $x_+ \geq -b$，$b < \frac{3}{4}$ 用于实根的判别式。）

第 (ii) 部分

设 $z = x + \mathrm{i}y$。那么

$$z^3 = x^3 - 3xy^2 + \left(3x^2y - y^3\right)\mathrm{i}, \qquad |z+2|^2 = (x+2)^2 + y^2.$$

后者是实数，所以方程的虚部为

$$y\left(3x^2 - y^2\right) = 0,$$

得 $y = 0$ 或 $y^2 = 3x^2$。（从几何角度看，z 位于实轴或直线 $y = \pm\sqrt{3}\,x$ 之一上：这些正是辐角为 $\frac{\pi}{3}$ 的倍数的方向，亦即使 z^3 为实数的方向。）

情况 $y = 0$。由实部得 $x^3 + (x+2)^2 = 4$，即

$$x^3 + x^2 + 4x = x\left(x^2 + x + 4\right) = 0.$$

该二次式的判别式为 $1 - 16 < 0$，所以唯一的解是 $x = 0$，即 $z = 0$。

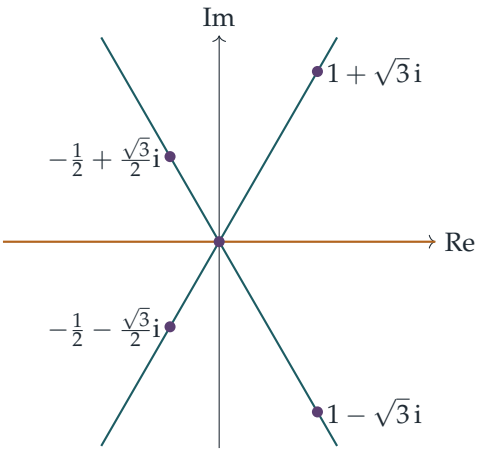
情况 $y^2 = 3x^2$。把 $y^2 = 3x^2$ 代入实部 $x^3 - 3xy^2 + (x+2)^2 + y^2 = 4$：

$$\begin{aligned} x^3 - 9x^3 + x^2 + 4x + 4 + 3x^2 &= 4 \\ -8x^3 + 4x^2 + 4x &= 0 \\ -4x\left(2x^2 - x - 1\right) &= 0 \\ -4x(2x+1)(x-1) &= 0. \end{aligned}$$

- $x = 0$ 迫使 $y = 0$：这又是 $z = 0$。
- $x = 1$ 给出 $y^2 = 3$，所以 $z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}$。
- $x = -\frac{1}{2}$ 给出 $y^2 = \frac{3}{4}$，所以 $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}$。

每一步都是等价变换（我们只是代入和因式分解），所以以上全部确实都是解。因此方程恰好有五个根：

$$z = 0, \qquad z = 1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}, \qquad z = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.$$



这些根都落在虚部所容许的三条直线 $y=0$ 和 $y=\pm\sqrt{3}\,x$ 上。

验算

- 以极式（polar form）表示，$1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$，所以 $z^3=8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-8$，而 $|3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}|^2=9+3=12$；果然 $-8+12=4$。
- $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$ 是单位立方根（cube root of unity），所以 $z^3=1$，而 $|\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}|^2=\frac{9}{4}+\frac{3}{4}=3$；果然 $1+3=4$。
- 在 (d) 中试取 $b=\frac{5}{8}$：则 $Y=\sqrt{\frac{25}{64}-\frac{16}{64}}=\frac{3}{8}$，且 $-\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{25}{64}}=-\frac{3}{8}+\frac{7}{8}=\frac{1}{2}$。实根为 $x_+=\frac{-1+\sqrt{1/2}}{2}\approx-0.146$，正如所需，它大于 $-\frac{5}{8}$。
- 以电脑在整个区域 $|x|,|y|\le 3$ 内搜索第 (ii) 部分方程的根，找到的恰好是上述五个根。

常见错误

- 把 $|z+b|$ 当作有虚部，或把 $|z+2|^2$ 展开成 $(z+2)^2$。模的平方是 $(x+2)^2+y^2$，是一个实数。
- 忘记检查情况方程的根是否落在该情况适用的范围内，如 (c) 和 (d)。
- 在 (ii) 中把虚部除以 y，因而漏掉实根 $z=0$。

STEP 之外

混合了 z 与 $|z|$（或与 $\bar{z}$）的方程并不是 z 的多项式方程，所以代数基本定理（fundamental theorem of algebra）对它们有多少个根毫无说明：这里一条“三次”方程竟有五个根。正确的看法是把它们视为两个实未知数的一对实方程。你会在大学一年级的复分析（complex analysis）中再次遇到这个观点：一个函数只有在仅依赖 z 而不依赖 $\bar{z}$ 时，才是复意义下可微的（这就是柯西－黎曼方程（Cauchy–Riemann equations），柯西（Cauchy）、黎曼（Riemann））。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）把这幅几何图像描绘得栩栩如生。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。