详细解答

STEP II 2025，第 10 题

力学 · 刚杆的静力学

STEP II 2025，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

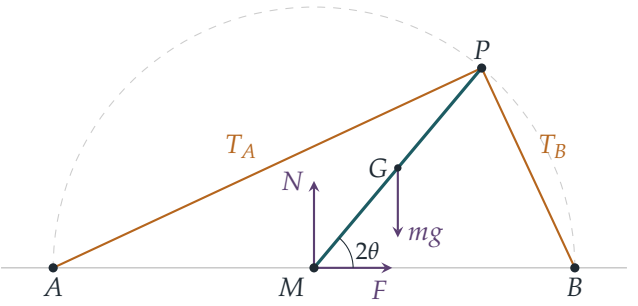
关键思路

由于 $MA = MB = MP = a$，点 P 位于以 AB 为直径的圆上，而整道题正是由这一个观察推动的：它给出 P 处的直角、以 θ 表示的绳长，以及每条绳与杆所成的角。根据胡克定律（Hooke's law），张力（tension）为 $\lambda(\text{长度} - \ell)/\ell$，它自然地分拆成“$\lambda \times \text{长度}/\ell$”部分和常数“$-\lambda$”部分；这个分拆正是第 (i) 部分所要求的分解。之后，只要对适当选取的点取力矩（moment），就能消去我们不需要的力。

解答

把杆模型化为均匀（uniform）刚性杆，其重量 mg 作用于中点 G；把绳模型化为遵从胡克定律的轻弹性绳（light elastic string）。把 M 置于原点，$B = (a, 0)$，$A = (-a, 0)$，于是

$$P = (a\cos 2\theta,\ a\sin 2\theta).$$



（图中摩擦力 F 的方向会在第 (iii) 部分加以说明。）

第 (i) 部分

由于 $MA = MB = MP = a$，点 P 位于以 M 为圆心、AB 为直径的圆上。根据半圆上的圆周角定理（angle in a semicircle），$\angle APB = 90°$。

绳长。三角形 MPA 是等腰三角形(isosceles),$MP = MA$,顶角 $\angle PMA = 180° - 2\theta$,因此两个底角为 $\angle MPA = \angle MAP = \theta$。同理, 三角形 MPB 的顶角为 2θ, 所以 $\angle MPB = 90° - \theta$。在直角三角形 APB 中，斜边（hypotenuse）$AB = 2a$，且 $\angle PAB = \theta$，故

$$PA = 2a\cos\theta, \qquad PB = 2a\sin\theta.$$

由于 $\theta < 45°$，有 $PB < PA$；两条绳都处于张紧状态，所以 $2a\sin\theta > \ell$。

分拆力。设 $\mathbf{u}_A$ 和 $\mathbf{u}_B$ 为由 P 分别指向 A 和 B 的单位向量（unit vector）。根据胡克定律, 绳 PA 的张力为 $\lambda(PA - \ell)/\ell$，因此它在 P 点施于杆上的力为

$$\frac{\lambda(PA-\ell)}{\ell}\,\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,PA\,\mathbf{u}_A - \lambda\mathbf{u}_A = \frac{\lambda}{\ell}\,\overrightarrow{PA} - \lambda\mathbf{u}_A,$$

PB 的情况亦然。把两者相加,

$$\text{绳的合力} = \frac{\lambda}{\ell}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}\right) - \lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B).$$

由于 M 是 AB 的中点，$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{PM}$，而 $|\overrightarrow{PM}| = a$。所以第一项是沿杆方向（指向 M）、大小为 $2a\lambda/\ell$ 的力。

至于第二项, $\mathbf{u}_A$ 和 $\mathbf{u}_B$ 是互相垂直的单位向量 (P 处的角是直角), 所以 $\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B$ 是单位正方形的对角线: 其长度为 $\sqrt{2}$, 方向沿 $\angle APB$ 的角平分线 (bisector)。因此 $-\lambda(\mathbf{u}_A + \mathbf{u}_B)$ 是沿 $\angle APB$ 的角平分线（指离 AB）、大小为 $\sqrt{2}\,\lambda$ 的力。这就是所求的分解。

第 (ii) 部分

对 M 取力矩；该处的摩擦力（friction）和法向反作用力（normal reaction）没有力矩。以逆时针方向为正（B 位于右方）。

想一想 M 与每条绳所在直线的距离是多少?

直线 PA 与 PM 所成的角为 $\angle MPA = \theta$，而 $PM = a$，所以 M 到直线 PA 的垂直距离为 $a\sin\theta$。同理，M 到直线 PB 的距离为 $a\sin(90° - \theta) = a\cos\theta$。重量作用于 M 右方水平距离 $\frac{1}{2}a\cos 2\theta$ 处。

绳 PA 把 P 拉向 A（绕 M 逆时针）；PB 和重量则使杆顺时针转动。以 T_A、T_B 表示两条绳的张力,

$$T_A\,a\sin\theta \;=\; T_B\,a\cos\theta + mg\cdot\tfrac{1}{2}a\cos 2\theta.$$

代入 $T_A = \lambda(2a\cos\theta - \ell)/\ell$ 和 $T_B = \lambda(2a\sin\theta - \ell)/\ell$,

$$\begin{aligned} T_A\sin\theta - T_B\cos\theta &= \frac{\lambda}{\ell}\big(2a\cos\theta\sin\theta - \ell\sin\theta - 2a\sin\theta\cos\theta + \ell\cos\theta\big) \\ &= \lambda(\cos\theta - \sin\theta). \end{aligned}$$

(这其实就是那个大小为 $\sqrt{2}\lambda$、沿角平分线的力的力矩，因为沿杆方向的力对 M 没有力矩。) 于是力矩方程变为

$$\lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = \tfrac{1}{2}mg(\cos\theta - \sin\theta)(\cos\theta + \sin\theta).$$

由于 $0 < \theta < 45°$，有 $\cos\theta - \sin\theta > 0$，所以可以两边除以它:

$$\cos\theta + \sin\theta = \frac{2\lambda}{mg}.$$

λ 的范围。写成 $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\sin(\theta + 45°)$。杆与地面倾斜，所以 $0 < \theta < 45°$，即 $45° < \theta + 45° < 90°$，在此范围内 sin 由 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 严格递增至 1。因此

$$1 < \cos\theta + \sin\theta < \sqrt{2} \quad\Longrightarrow\quad \tfrac{1}{2}mg < \lambda < \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,mg,$$

这就是这种平衡（equilibrium）存在的必要条件（necessary condition）。

第 (iii) 部分

> ? **想一想** 对哪一点取力矩，能使两条绳的力都从力矩方程中消失?

两条绳都作用于 P, 所以对 P 取力矩: 这样方程中只出现重量和 M 处的两个地面作用力。相对于 P，点 M 位于水平距离 $a\cos 2\theta$（向左）及垂直距离 $a\sin 2\theta$（向下）处；G 的相应距离则为其一半。

假设摩擦力 F 指向 B（下文会加以证实)。对 P 取力矩:

- N（在 M 处向上，位于 P 左方）的顺时针力矩为 $N\,a\cos 2\theta$;
- F（在 M 处指向 B，位于 P 下方）的逆时针力矩为 $F\,a\sin 2\theta$;
- mg（在 G 处向下，位于 P 左方）的逆时针力矩为 $mg\cdot\frac{1}{2}a\cos 2\theta$。

平衡时,

$$Na\cos 2\theta = Fa\sin 2\theta + \tfrac{1}{2}mg\,a\cos 2\theta.$$

由于 $2\theta < 90°$，有 $\cos 2\theta > 0$，两边除以 $a\cos 2\theta$ 得

$$N - F\tan 2\theta = \tfrac{1}{2}mg,$$

此即所求。

摩擦力的方向。沿水平方向分解，F 与绳力的水平分量平衡。由第 (i) 部分，$\mathbf{u}_A = (-\cos\theta, -\sin\theta)$，$\mathbf{u}_B = (\sin\theta, -\cos\theta)$，而 $\overrightarrow{PM} = (-a\cos 2\theta, -a\sin 2\theta)$，所以绳力的水平分量为 $-\frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta + \lambda(\cos\theta - \sin\theta)$。因此指向 B 的摩擦力为

$$F = \frac{2a\lambda}{\ell}\cos 2\theta - \lambda(\cos\theta - \sin\theta) = \lambda(\cos\theta - \sin\theta)\left(\frac{2a(\cos\theta + \sin\theta)}{\ell} - 1\right),$$

由于 $2a\sin\theta > \ell$（两条绳都张紧），它是正数。所以摩擦力确实指向 B，而 F 就是其大小。

验算

- 第 (ii) 部分的极限情况合理：当 $\theta \to 0$，杆几乎平躺，$\lambda \to \frac{1}{2}mg$；当 $\theta \to 45°$，杆变为铅直，$\lambda \to mg/\sqrt{2}$。
- 数值验算：取 $a = 1$、$mg = 10$、$\theta = 20°$、$\ell = 0.5$，则 $\lambda = 5(\cos 20° + \sin 20°) \approx 6.408$，张力为 $T_A \approx 17.68$ 及 $T_B \approx 2.36$，分解后得 $N \approx 18.26$、$F \approx 15.81$，所以 $N - F\tan 40° \approx 5.00 = \frac{1}{2}mg$。对 M 的力矩亦平衡。以电脑对数千个随机构形进行验算，所有结果在舍入误差范围内均成立。

常见错误

- 把张力写成 $\lambda \times$ 伸长量，而不是 $\lambda \times$ 伸长量$/\ell$。
- 除以 $\cos\theta - \sin\theta$ 或 $\cos 2\theta$ 时，没有指出 $\theta < 45°$ 使它们为正。
- 在第 (iii) 部分对 M 取力矩：这样会消去 N 和 F，而它们恰恰是我们想求的力。对 P 取力矩则会消去绳的力。

STEP 之外

第 (i) 部分的分拆是一个一般事实的巧妙例子：作用于刚体（rigid body）上的一组力，等价于单一个力加上一个力偶（couple），而你可以随意把各力分组，使力矩的计算最为简便。这里“每条绳 $-\lambda$”的部分，表现得就像一对张力恒定的绳，其合力完全由几何决定。刚体静力学（statics）、虚功（virtual work）及平衡的稳定性，在 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）中有深入的讨论。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。