详细解答

# STEP II 2025，第 1 题

纯数学 · 分段函数

**STEP II 2025，第 1 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2025 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP II 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

## 关键思路

由 Min 构成的函数，其实只是一个在不同区间上由不同公式给出的普通函数。因此每次的第一步，都是找出两个自变量在哪里相交，把函数写成分段函数（piecewise function），然后逐个区间处理，只保留落在其所属区间内的答案。在接驳处，函数保持连续（continuous），但通常会出现一个角点（corner）；正是这个角点，令 (iv) 中的那一点成为极大点，而导数（derivative）却不等于零。

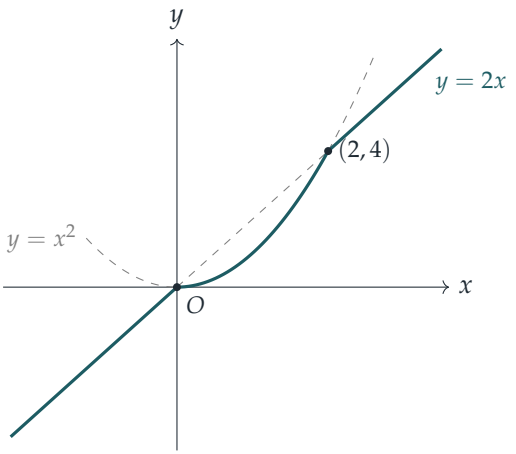
## 解答

### 第 (i) 部分

我们有 $x^2 \le 2x \iff x(x-2) \le 0 \iff 0 \le x \le 2$。因此

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) = \begin{cases} x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 2x & x < 0 \text{ 或 } x > 2. \end{cases}$$

图像沿直线 $y = 2x$ 走，只是在 $x = 0$ 与 $x = 2$ 之间会下沉到抛物线（parabola）上，因为抛物线在该处位于其弦（chord）之下。两段直线部分都在同一条直线上。图像在 $(0,0)$ 有一个角点，那里抛物线的斜率（gradient）为 0，而直线的斜率为 2；在 $(2,4)$ 亦有一个角点，那里两者的斜率分别为 4 和 2。




**第 (ii) 部分**

利用 (i) 中的两段。

- 当 $0 \le x \le 2$：$2x^2 = 5x - 3 \iff 2x^2 - 5x + 3 = 0 \iff (2x-3)(x-1) = 0$，所以 $x = 1$ 或 $x = \frac{3}{2}$。两者都在 $[0,2]$ 内，所以两个都成立。
- 当 $x < 0$ 或 $x > 2$：$4x = 5x - 3 \iff x = 3$，它满足 $x > 2$，所以成立。

解为 $x = 1$、$x = \frac{3}{2}$ 和 $x = 3$。

**第 (iii) 部分**

我们还需要第二个函数：$x^3 \le 4x \iff x(x-2)(x+2) \le 0 \iff x \le -2$ 或 $0 \le x \le 2$。把两者合起来，

$$\mathrm{Min}(x^2, 2x) + \mathrm{Min}(x^3, 4x) = \begin{cases} x^3 + 2x & x \le -2, \\ 6x & -2 < x < 0, \\ x^3 + x^2 & 0 \le x \le 2, \\ 6x & x > 2. \end{cases}$$

$m = 2$。

- $x \le -2$：$x^3 + 2x = 2x$ 给出 $x = 0$，不在该区间内。
- $-2 < x < 0$ 及 $x > 2$：$6x = 2x$ 给出 $x = 0$，两个区间都不包含它。
- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 2x = x(x+2)(x-1) = 0$ 给出 $x = 0$ 或 $x = 1$（舍去 $x = -2$）。

所以当 $m = 2$ 时，解为 $x = 0$ 和 $x = 1$。

**想一想** 方程 $6x = 6x$ 会怎样?

它对每一个 $x$ 都成立，所以当 $m = 6$ 时，整个区间都是解，而不只是孤立的点。

$m = 6$。

- $x \le -2$：$x^3 + 2x = 6x \iff x(x-2)(x+2) = 0$，只有 $x = -2$ 在该区间内。
- $-2 < x < 0$ 及 $x > 2$：$6x = 6x$ 恒成立，所以这些区间内的每一个 $x$ 都是解。
- $0 \le x \le 2$：$x^3 + x^2 - 6x = x(x+3)(x-2) = 0$ 给出 $x = 0$ 或 $x = 2$（舍去 $x = -3$）。

综合起来，当 $m = 6$ 时，解集为

$$-2 \le x \le 0 \quad \text{或} \quad x \ge 2.$$

**第 (iv) 部分**

这里 $x^3 \le x^2 \iff x^2(x-1) \le 0 \iff x \le 1$（因子 $x^2$ 永不为负，而 $x = 0$ 时取等号）。因此

$$y = \begin{cases} 2x^3 - 5x & x \le 1, \\ 2x^2 - 5x & x > 1. \end{cases}$$

两条公式在 $x = 1$ 时都给出 $y = -3$，所以曲线在该处连续，并通过 $(1, -3)$。

**点** $(1, -3)$。 它不是驻点（stationary point）：在 $x = 1$ 处，左方的斜率是 $6x^2 - 5 = 1$，右方的斜率是 $4x - 5 = -1$。更准确地说，

- 当 $\sqrt{5/6} < x < 1$ 时，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 > 0$，所以 $y$ 递增至 $-3$;
- 当 $1 < x < \frac{5}{4}$ 时，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 4x - 5 < 0$，所以 $y$ 由 $-3$ 递减。

所以在 $x = 1$ 两侧附近的所有点都有 $y < -3$, 故 $(1, -3)$ 是局部极大点 (local maximum)，也是曲线的一个角点。

**其他转向点**。 在 $x < 1$ 上，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6x^2 - 5 = 0$ 给出 $x = \pm\sqrt{5/6} = \pm\frac{\sqrt{30}}{6}$，两者都小于 1。利用 $2x^2 = \frac{5}{3}$,

$$y = x(2x^2 - 5) = -\tfrac{10}{3}x = \mp\tfrac{10}{3} \cdot \tfrac{\sqrt{30}}{6} = \mp\tfrac{5\sqrt{30}}{9}.$$

由于 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x$，$x < 0$ 的那一点是极大点，$x > 0$ 的那一点是极小点。在 $x > 1$ 上，$4x - 5 = 0$ 给出 $x = \frac{5}{4}$，此时 $y = \frac{25}{8} - \frac{25}{4} = -\frac{25}{8}$；由于抛物线开口向上，这是极小点。

所以其余三个转向点（turning point）为

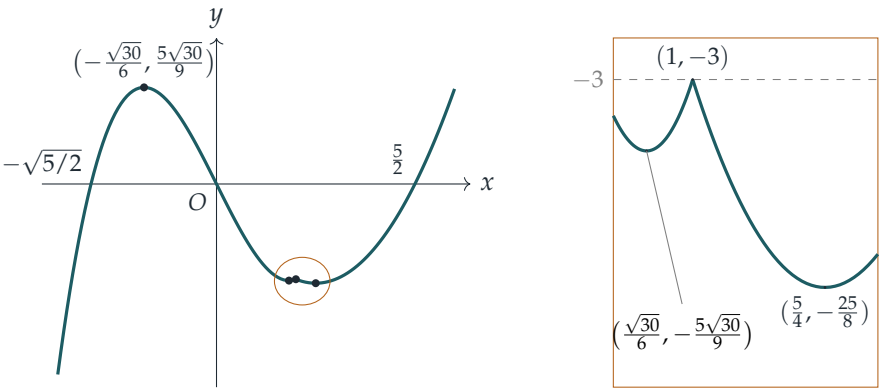
$$\text{极大点}\left(-\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ \tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right),\qquad \text{极小点}\left(\tfrac{\sqrt{30}}{6},\ -\tfrac{5\sqrt{30}}{9}\right)\text{ 和 }\left(\tfrac{5}{4},\ -\tfrac{25}{8}\right).$$

**草图。** 三次函数 $2x^3-5x$ 是奇函数（odd function），所以曲线在 $-1\le x\le 1$ 的部分关于原点旋转对称。曲线与坐标轴相交于：$x(2x^2-5)=0$ 且 $x\le 1$ 之处，即 $x=0$ 和 $x=-\sqrt{5/2}\approx -1.58$；以及 $x(2x-5)=0$ 且 $x>1$ 之处，即 $x=\frac{5}{2}$。当 $x\to-\infty$ 时，$y\to-\infty$；当 $x\to\infty$ 时，$y\to\infty$。

$x=1$ 附近的三个点非常接近，所以值得确定它们的上下次序。把正数 $\frac{5\sqrt{30}}{9}$ 和 $\frac{25}{8}$ 平方，得 $\frac{750}{81}\approx 9.26$ 和 $\frac{625}{64}\approx 9.77$，所以

$$-\tfrac{25}{8}<-\tfrac{5\sqrt{30}}{9}<-3:$$

$x=\frac{5}{4}$ 处的极小点较低，而两个极小点都在角点之下。在合理的比例下，这个细节是看不见的，所以插图把它放大了。




## 验算

- (ii)：在 $x=\frac{3}{2}$，$\mathrm{Min}(\frac{9}{4},3)=\frac{9}{4}$，而 $2\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{2}=5\cdot\frac{3}{2}-3$；在 $x=3$，$\mathrm{Min}(9,6)=6$，而 $12=15-3$。
- (iii)，$m=6$：试 $x=-1$，此时 $\mathrm{Min}(1,-2)+\mathrm{Min}(-1,-4)=-2-4=-6=6x$；而不在解集内的 $x=1$ 给出 $1+1=2\neq 6$。
- (iv)：用电脑在 $[-3,3]$ 上以 $10^{-5}$ 的步长扫描 $y$，恰好找到四个转向点，分别在 $x\approx -0.9129$（$y\approx 3.0429$）、$0.9129$（$-3.0429$）、$1$（$-3$）和 $1.25$（$-3.125$），与上面的数值吻合。

## 常见错误

- 保留了落在其公式适用区间以外的根，例如 (iii) 中 $m = 2$ 时的 $x = -2$。
- 把 $6x = 6x$ 当作只会给出单一数值来解，而没有意识到它在整个区间上都成立。
- 在 (iv) 中把曲线在 $(1, -3)$ 处画得圆滑：曲线在该处确实有一个角点，左方斜率为 1，右方斜率为 $-1$。

## STEP 之外

像 $\mathrm{Min}(f, g) = \frac{1}{2}\big(f + g - |f - g|\big)$ 这样的函数，只要 $f$ 和 $g$ 连续，它就必定连续，但不一定可微（differentiable）；而 (iv) 说明局部极大点不一定是驻点。在数学分析（analysis）课程中，这引出了一个需要小心陈述的结果：可微函数的极值出现在导数为零之处；同时也引出了单侧导数（one-sided derivatives）的概念。这类分段定义的函数在最优化（optimisation）中亦十分重要：若干个线性函数的最小值会产生角点，而这些角点正是线性规划（linear programming）所研究的对象。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）在讲解连续性和可微性时，正是以这类例子为出发点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。