详细解答

STEP III 2024，第 9 题

力学 · 斜碰撞

STEP III 2024，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

一切都在桌面这个平面上发生，所以不妨从上方俯视：每个球都变成一个以其最低点为圆心、半径为 r 的圆。对于光滑（smooth）球体，冲量（impulse）沿连心线（line of centres）作用，因此我们把速度分解为沿这条线的分量（动量守恒和恢复系数在此适用）和垂直于这条线的分量（保持不变）。此后 B 沿直线运动，而它会否撞到 C，就变成一个关于点到直线距离的问题。

解答

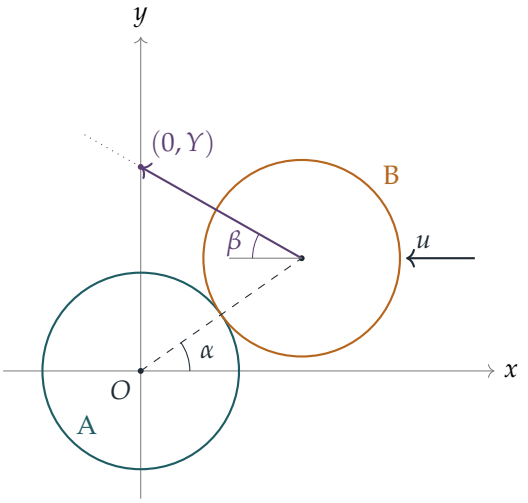
我们把球体视为光滑且质量相等，放在光滑桌面上，因此任何地方都没有摩擦，而除了碰撞的瞬间外，每个球都以恒定速率沿直线运动。我们以最低点来处理，因为最低点在水平方向的运动与球心完全相同；两个半径为 r 的球，当它们的最低点相距 $2r$ 时便互相接触。

第 (i) 部分

B 的最低点沿直线 $y = 2r\sin\alpha$ 移动。当它与 O 的距离为 $2r$ 时便接触 A，即在点 $(2r\cos\alpha,\ 2r\sin\alpha)$（取正的 x 坐标，因为 B 从 x 值很大的正方向驶来）。因此碰撞时，从 A 指向 B 的连心线的单位向量（unit vector）为

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \qquad \text{而} \qquad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

与之垂直。



碰撞前 B 的速度为 $\begin{pmatrix} -u \\ 0 \end{pmatrix}$，沿 **n** 的分量为 $-u\cos\alpha$，沿 **t** 的分量为 $u\sin\alpha$。A 处于静止。

由于球体光滑，两者之间的冲量沿 **n** 方向。因此 B 的 **t** 分量保持为 $u\sin\alpha$（而 A 不会获得任何 **t** 分量）。设碰撞后沿 **n** 的分量分别为 v_A 和 v_B。沿 **n** 方向的动量守恒（momentum conservation）（质量相等）及牛顿（Newton）恢复定律（law of restitution）给出

$$\begin{aligned} v_A + v_B &= -u\cos\alpha, \\ v_B - v_A &= \tfrac{1}{3}(0 - (-u\cos\alpha)) = \tfrac{1}{3}u\cos\alpha. \end{aligned}$$

（沿 **n** 的接近速率为 $u\cos\alpha$，而位于 **n** 正方向一侧的 B 与 A 分离。）两式相加，得 $v_B = -\frac{1}{3}u\cos\alpha$，以及 $v_A = -\frac{2}{3}u\cos\alpha$。

所以碰撞后 B 的速度为

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}u\cos\alpha \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + u\sin\alpha \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}u(1 + 2\sin^2\alpha) \\ \frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

这里用了 $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$。这就是所求的结果。

第 (ii) 部分

两个分量都不为零，其中 x 分量为负，y 分量为正（因为 α 是锐角）。所以 B 此时向左上方运动，其路径斜率的大小为

$$\frac{\frac{2}{3}u\sin\alpha\cos\alpha}{\frac{1}{3}u(1 + 2\sin^2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha} = \tan\beta,$$

其中 β 是路径与 x 负方向所成的锐角。B 的最低点从 $(2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha)$ 出发。要到达 y 轴，x 须减少 $2r\cos\alpha$，同时 y 增加 $2r\cos\alpha\tan\beta$。所以它在 $(0, Y)$ 穿过 y 轴，其中

$$Y = 2r\sin\alpha + 2r\cos\alpha\tan\beta = 2r(\cos\alpha\tan\beta + \sin\alpha),$$

正如所求。

第 (iii) 部分

碰撞后 B 以恒定速率沿直线运动，沿着经过 $(0, Y)$、单位方向向量为 $\mathbf{d} = (-\cos\beta, \sin\beta)$ 的直线 ℓ。C 一直静止于 $(0, h)$，直至被撞到为止。B 撞到 C 当且仅当 $(0, h)$ 到 B 的路径的距离跌到 $2r$ 以下。

$(0, h)$ 到 ℓ 的垂直距离（perpendicular distance），就是 $(0, h) - (0, Y) = (0, h - Y)$ 垂直于 $\mathbf{d}$ 的分量的大小。ℓ 的一个单位法向量为 $(\sin\beta, \cos\beta)$，所以这个距离是

$$|(0,\, h - Y)\cdot(\sin\beta, \cos\beta)| = |h - Y|\cos\beta,$$

因为 β 是锐角，所以 $\cos\beta > 0$。若 $h > Y + 2r\sec\beta$，则 $h - Y > 2r\sec\beta > 0$，而距离为 $(h - Y)\cos\beta > 2r$。B 的路径上每一点（不只是整条直线上最近的那一点）与 C 的最低点的距离都至少有这么远。所以 B 永远不会进入 C 的 $2r$ 范围内，也就不会撞到它。

（也没有其他东西阻碍：A 以速度 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,\mathbf{n}$ 离开，进入 $y < 0$ 的区域，远离 B 和 C。）

> **想一想** 第 (iv) 部分要求我们证明 $Y < 2r\sec\beta$。能否把它化为单一个三角恒等事实?

可以：两边乘以 $\cos\beta > 0$，左边就变成一条复角公式（compound-angle formula）。

第 (iv) 部分

除以 $2r$ 并乘以 $\cos\beta > 0$，不等式 $Y < 2r\sec\beta$ 等价于

$$\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta < 1, \qquad \text{即} \qquad \sin(\alpha + \beta) < 1.$$

显然 $\sin(\alpha + \beta) \le 1$，且等号只在 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 时成立（因为 $0 < \alpha + \beta < \pi$）。这意味着 $\tan\beta = \cot\alpha$，即

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1 + 2\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \iff 2\sin^2\alpha = 1 + 2\sin^2\alpha$$

（除以 $\cos\alpha \neq 0$），这是不可能的。因此 $\sin(\alpha + \beta) < 1$，从而 $Y < 2r\sec\beta$。

由此。现在

$$Y + 2r\sec\beta < 4r\sec\beta,$$

所以我们需要 $\sec\beta$ 在所有锐角 α 下的上界，即 $\tan\beta$ 的上界。分子分母同除以 $\cos^2\alpha$，并记 $t=\tan\alpha>0$，

$$\tan\beta=\frac{2\tan\alpha}{\sec^2\alpha+2\tan^2\alpha}=\frac{2t}{1+3t^2}\le\frac{2t}{2\sqrt{3}\,t}=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

这里用了算术—几何平均不等式（AM–GM inequality）$1+3t^2\ge 2\sqrt{3}\,t$（等号在 $t=1/\sqrt{3}$ 即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时成立）。所以 $0<\beta\le\frac{\pi}{6}$，从而 $\sec\beta\le\sec\frac{\pi}{6}=\frac{2}{\sqrt{3}}$。因此对每个锐角 α，

$$Y+2r\sec\beta<4r\sec\beta\le\frac{8r}{\sqrt{3}}.$$

若 $h>\dfrac{8r}{\sqrt{3}}$，则 $h>Y+2r\sec\beta$，由第 (iii) 部分可知，无论 α 取何值，B 都不会撞到 C。

验算

- 动量：A 的速度 $-\frac{2}{3}u\cos\alpha\,(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 加上第 (i) 部分中 B 的速度，总和为 $(-u,0)$，符合质量相等时应有的结果。
- 当 $\alpha=0$（正面碰撞）时，公式给出 B 的速度为 $(-\frac{1}{3}u,0)$，而 A 得到 $(-\frac{2}{3}u,0)$：正是质量相等、$e=\frac{1}{3}$ 时常见的一维答案。
- 取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，得 $\tan\beta=1/\sqrt{3}$，所以 $\beta=\frac{\pi}{6}$，$\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$，而 $Y=2r(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2})=2r$，明显小于 $2r\sec\beta=4r/\sqrt{3}\approx 2.31r$。于是 $Y+2r\sec\beta\approx 4.31r$，低于 $8r/\sqrt{3}\approx 4.62r$。
- 我们用电脑对 20,000 个随机的 α 值作了验证：逐步推进 B 的直线路径，得到的穿越点正是上面的 Y；在略高于 $h=Y+2r\sec\beta$ 时 B 避过 C，略低于此值时则撞到 C；而 $\sec\beta$ 的最大值为 $1.1547\ldots=2/\sqrt{3}$。

常见错误

- 把恢复系数应用于 x 分量，而不是沿连心线的分量。光滑球体之间的冲量沿连心线作用，而这里连心线与 x 轴成角 α。
- 以为碰撞时连心线沿 x 轴或 y 轴。接触点是由两球相距 $2r$ 这一条件决定的。
- 在第 (iii) 部分中，只检验 C 的最低点是否在单一点 $(0,Y)$ 的 $2r$ 范围内，而不是整条路径的 $2r$ 范围内。

STEP 之外

把速度分解为沿某个选定单位向量及垂直于它的分量，就是投影到一组标准正交基（orthonormal basis）上，这个概念贯穿大学一年级的线性代数和力学。光滑球体的斜碰

（oblique collision）是散射（scattering）的入门模型，物理学家用它来研究气体和粒子碰撞。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）就以这种向量方法处理二维碰撞。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。