详细解答

STEP III 2024，第 8 题

纯数学 · 相交圆锥曲线

STEP III 2024，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

形如 $y^2 - x^2 + \ldots$ 的二次式（quadratic expression），当且仅当配方（completing the square）后不留下常数项时，才会分解为两条斜率（gradient）为 ± 1 的直线。题目其余部分的窍门在于：把一条曲线方程的某个倍数加到另一条曲线的方程上，不会失去任何公共点；而选取恰当的倍数，便能把棘手的四次（quartic）问题化为“哪些直线与抛物线（parabola）相交”，而这只不过是两个二次方程。

解答

第 (i) 部分

乘积为零当且仅当其中一个因子为零，因此满足 $(y - x + 3)(y + x - 5) = 0$ 的点，就是 $y = x - 3$（斜率为 1）上的点，连同 $y = -x + 5$（斜率为 -1）上的点。

对于一般方程，就两个变量分别配方：

$$y^2 - x^2 + py + qx + r = (y + \tfrac{1}{2}p)^2 - (x - \tfrac{1}{2}q)^2 - K, \qquad \text{其中} K = \tfrac{1}{4}(p^2 - q^2) - r.$$

设 $Y = y + \frac{1}{2}p$ 及 $X = x - \frac{1}{2}q$，这是一个平移（translation），不会改变斜率。方程变为 $(Y - X)(Y + X) = K$。

若 $p^2 - q^2 = 4r$, 则 $K = 0$, 方程为 $(Y - X)(Y + X) = 0$; 由第一段可知, 这是直线 $Y = X$ 与 $Y = -X$ 组成的一对直线，斜率分别为 1 和 -1。在原坐标下，它们是

$$y - x + \tfrac{1}{2}(p + q) = 0 \quad \text{及} \quad y + x + \tfrac{1}{2}(p - q) = 0.$$

反过来，假设该方程表示一对斜率为 ± 1 的直线；我们证明 $K = 0$。其中一条直线的斜

率为 1，故具有 $Y = X + c$ 的形式，而且直线上每一点都满足该方程。在这条直线上，$(Y - X)(Y + X) = c(2X + c)$，所以对每一个实数 X 都有 $2cX + c^2 = K$。X 的线性函数只有在其系数为零时才是常数，所以 $c = 0$，于是 $K = c^2 = 0$。因此 $p^2 - q^2 = 4r$，“当且仅当”（if and only if）得证。

第 (ii) 部分

若某点位于 C_1 上，则该处有 $y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0$；若它位于 C_2 上，则该处有 $y - x^2 = 0$。所以在公共点处，表达式

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x + k(y - x^2)$$

的值为 $0 + k \cdot 0 = 0$，不论 k 取何值。

取 $k = 1$，方程为

$$y^2 - x^2 + (2s+1)y - x + s(s+1) = 0,$$

它具有第 (i) 部分的形式，其中 $p = 2s + 1$、$q = -1$、$r = s(s+1)$。于是

$$p^2 - q^2 = 4s^2 + 4s + 1 - 1 = 4s(s+1) = 4r,$$

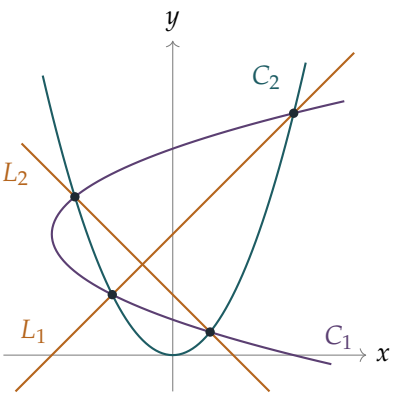
所以由第 (i) 部分，这是一对斜率为 1 和 -1 的直线。利用第 (i) 部分的因式分解（factorisation），并注意 $\frac{1}{2}(p+q) = s$ 及 $\frac{1}{2}(p-q) = s+1$，方程为

$$(y - x + s)(y + x + s + 1) = 0,$$

所以这两条直线是

$$L_1 : \ y = x - s \qquad 及 \qquad L_2 : \ y = -x - s - 1.$$

由第一段，$C_1 \cap C_2$ 的每一点都满足这个方程，所以全部四个交点都位于 $L_1 \cup L_2$ 上。（这对每个 s 都成立；我们从来不需要这四个点存在。）



图中所示为 $s = -2$ 的情况：C_1 为 $x = (y-2)^2 - 2$，而 C_1 与 C_2 的四个公共点分别有两个位于直线 $y = x + 2$ 上、两个位于直线 $y = 1 - x$ 上。

第 (iii) 部分

C_1 与 C_2 的每个公共点都位于 C_2 上，并位于 L_1 或 L_2 上。代入 $y = x^2$：

$$\text{对于} L_1: \quad x^2 - x + s = 0,$$
$$\text{对于} L_2: \quad x^2 + x + s + 1 = 0.$$

C_2 上的点由其 x 坐标唯一确定，所以每条直线与 C_2 至多相交于两点。因此，要有四个不同的公共点，每个二次方程都必须有两个不同的实根，所以两个判别式（discriminant）都为正：

$$1 - 4s > 0 \quad \text{及} \quad 1 - 4(s+1) > 0.$$

第二个不等式给出 $s < -\frac{3}{4}$，即所求。（第一个不等式 $s < \frac{1}{4}$ 随之自动成立。）

> **想一想** 在第 (iv) 部分，为甚么只找出四个同时位于 C_2 和 $L_1 \cup L_2$ 上的点并不足够?

第 (ii) 部分只证明了 C_1 与 C_2 的公共点位于这两条直线上；我们还需要反方向的结论，而且必须确保这四个点不会重合。

第 (iv) 部分

设 $s < -\frac{3}{4}$。那么上述两个判别式都为正（$-3 - 4s > 0$，以及 $1 - 4s > 4 > 0$），所以 L_1 与 C_2 相交于两个不同的点，L_2 亦然。

这四个点互不相同。若某点被重复计算，它便同时位于 L_1 和 L_2 上。两直线相交于 $x - s = -x - s - 1$ 之处，即点 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - s)$。此点只在 $-\frac{1}{2} - s = \frac{1}{4}$，即 $s = -\frac{3}{4}$ 时才位于 C_2 上，而这已被排除。所以我们得到四个不同的点。

它们每一个都位于 C_1 上。在每一点处都有 $y - x^2 = 0$（因为它在 C_2 上），而第 (ii) 部分 $k = 1$ 的方程亦成立（因为它在 L_1 或 L_2 上）。两式相减，得

$$y^2 + 2sy + s(s+1) - x = 0,$$

这正是 C_1 的方程。

所以 C_1 与 C_2 至少有四个不同的公共点；由第 (iii) 部分的论证，它们不可能多于四个。因此两者恰好相交于四个不同的点。

验算

- 把 $y = x^2$ 代入 C_1，得四次方程 $x^4 + 2sx^2 - x + s^2 + s = 0$。展开 $(x^2 - x + s)(x^2 + x + s + 1)$ 正好得到此式，印证了这对直线。

- 当 $s=-2$ 时，四个点为 $(2,4)$、$(-1,1)$ 及 $\left(\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5}),\frac{1}{2}(3\mp\sqrt{5})\right)$；每一点都满足 $x=(y-2)^2-2$，例如 $(2,4)$：$(4-2)^2-2=2$。
- 在边界 $s=-\frac{3}{4}$ 时，两个二次方程为 $x^2-x-\frac{3}{4}=0$（根为 $\frac{3}{2},-\frac{1}{2}$）及 $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=0$，所以只有两个不同的公共点，其中 $x=-\frac{1}{2}$ 为两条直线所共有。用电脑计算该四次方程的实根数目，在 $s=-0.76,-1,-2$ 时得 4 个，在 $s=-0.74,-0.5$ 时得 2 个。

常见错误

- 在第 (i) 部分只证明“若”的方向：一对直线必然给出 $p^2-q^2=4r$，这一点需要论证（例如上文的论证）。
- 在第 (iv) 部分，忘记检查两条直线没有共用 C_2 上的点，或忘记证明所找到的点确实位于 C_1 上。

STEP 之外

方程族 $F+kG=0$ 称为二次曲线束（pencil of conics）：族中每一条曲线都经过 $F=0$ 与 $G=0$ 的公共点。选取 k 使该曲线退化（degenerate）为一对直线，是求两条二次曲线（conics）交点的经典方法。在射影几何（projective geometry）中，做法是令一个 3×3 行列式（determinant）为零，从而得到一个关于 k 的三次方程。在本题中，不论 s 为何值，曲线束在 $k=1$ 时恰好都是退化的。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）讲解了二次曲线背后的对称矩阵（symmetric matrices）。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）收录了更多同类型的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。