详细解答

STEP III 2024，第 7 题

纯数学 • e^2 的无理性

STEP III 2024，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 1.4 节*e 是无理数，e^2 也是*中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch01/e-irrational.html

关键思路

两个级数都是指数级数（exponential series）乘以一个阶乘（factorial）之后的尾项（tail）。把 $\mathrm{e} = \sum 1/r!$ 乘以 $(2n)!$，则直至 $r = 2n$ 的每一项都变成整数，而其后的部分恰好就是 $\mathrm{f}(2n)$；$1/\mathrm{e}$ 与 $\mathrm{g}(2n)$ 亦有同样情况。假如 e^2 是有理数（rational），这些细小尾项的某个组合便必须是整数，但它却被严格夹在 0 与 1 之间。

解答

记

$$a_k = \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}, \qquad k \geq 1,$$

于是 $\mathrm{f}(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$，而 $\mathrm{g}(n) = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$。注意 $a_{k+1} = a_k/(n+k+1)$。

第 (i) 部分

每个 a_k 都是正数，所以 $\mathrm{f}(n) > 0$。a_k 分母中的每个因子都至少是 $n+1$，所以 $a_k \leq 1/(n+1)^k$，而当 $k \geq 2$ 时不等式是严格的（因为出现了因子 $n+2$）。与公比为 $\frac{1}{n+1} < 1$ 的几何级数（geometric series）比较，

$$\mathrm{f}(n) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n}.$$

因此 $0 < \mathrm{f}(n) < \frac{1}{n}$。

第 (ii) 部分

相邻各项严格递减：由于 $n+k+1 > 1$，$a_{k+1} = a_k/(n+k+1) < a_k$。从头开始两两分组，

$$\mathrm{g}(n) = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots > 0,$$

因为每个括号都是正数。改为从第一项之后开始分组，

$$\mathrm{g}(n) = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots < a_1 = \frac{1}{n+1},$$

因为每个括号同样是正数。所以 $0 < \mathrm{g}(n) < \frac{1}{n+1}$。

第 (iii) 部分

设 $m = 2n$。利用 $\mathrm{e} = \sum_{r\ge 0} 1/r!$，

$$m!\,\mathrm{e} = \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!} + \sum_{r=m+1}^{\infty} \frac{m!}{r!}.$$

当 $r \le m$ 时，$m!/r! = (r+1)(r+2)\cdots m$ 是整数，所以第一个和是整数，记之为 A。在第二个和中，$m!/(m+k)! = 1/\big((m+1)\cdots(m+k)\big)$，这正是 $\mathrm{f}(m)$ 的第 k 项。所以 $m!\,\mathrm{e} = A + \mathrm{f}(m)$，而 $(2n)!\,\mathrm{e} - \mathrm{f}(2n) = A$ 是整数。

同理，由 $1/\mathrm{e} = \sum_{r\ge 0}(-1)^r/r!$ 得

$$\frac{m!}{\mathrm{e}} = \underbrace{\sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{m!}{r!}}_{B\in\mathbb{Z}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+k}}{(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}.$$

> **想一想** 为甚么题目用 $2n$ 而不用 n?

由于 $m = 2n$ 是偶数，$(-1)^{m+k} = (-1)^k$，所以尾项是 $-a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = -\mathrm{g}(m)$（此处 a_k 改由 m 构成）。因此 $m!/\mathrm{e} = B - \mathrm{g}(m)$，而 $\dfrac{(2n)!}{\mathrm{e}} + \mathrm{g}(2n) = B$ 是整数。（若 m 为奇数，尾项会是 $+\mathrm{g}(m)$，我们便需要改用减号。）

第 (iv) 部分

利用第 (iii) 部分中的整数 A 和 B，

$$\begin{aligned} q\,\mathrm{f}(2n) + p\,\mathrm{g}(2n) &= q\big((2n)!\,\mathrm{e} - A\big) + p\Big(B - \frac{(2n)!}{\mathrm{e}}\Big) \\ &= (2n)!\Big(q\mathrm{e} - \frac{p}{\mathrm{e}}\Big) - qA + pB \\ &= pB - qA, \end{aligned}$$

因为 $qe = p/e$。由于 p, q, A, B 都是整数，所以对每个正整数 n，$q\,f(2n) + p\,g(2n)$ 亦是整数。

第 (v) 部分

用反证法（proof by contradiction），假设 e^2 是有理数。由于 $e^2 > 0$，我们可写 $e^2 = p/q$，其中 p, q 是正整数；两边除以 e 得 $qe = p/e$。由第 (iv) 部分，对每个 $n \geq 1$，$N_n = q\,f(2n) + p\,g(2n)$ 都是整数。

> **想一想** 怎样才能令 N_n 不是整数?

把第 (i) 及 (ii) 部分应用于 $2n$，将它夹住。由于 $p, q > 0$，

$$0 < N_n < \frac{q}{2n} + \frac{p}{2n+1} < \frac{p+q}{2n}.$$

现在取足够大的 n，使 $2n > p + q$。那么 $0 < N_n < 1$，即 N_n 是严格介乎 0 与 1 之间的整数，这是不可能的。因此 e^2 是无理数（irrational）。

验算

细小的情况可以准确求和。当 $n = 2$ 时，第 (iii) 部分指出 $24e - f(4)$ 是整数；事实上 $\sum_{r=0}^{4} 24/r! = 65$，而 $f(4) = 24e - 65 \approx 0.2388$，稳稳落在 $(0, \frac{1}{4})$ 之内。同样地，$f(2) = 2e - 5 \approx 0.4366 < \frac{1}{2}$，而 $g(2) = 1 - 2/e \approx 0.2642 < \frac{1}{3}$。电脑验算确认了：(i) 和 (ii) 的界限对 $n \leq 24$ 成立；(iii) 的整数性对 $2n \leq 22$ 成立；以及对随机的 p, q，$0 < q\,f(2n) + p\,g(2n) < (p+q)/(2n)$ 成立。

常见错误

- 声称 $a_k < 1/(n+1)^k$ 对所有 k 成立：在 $k = 1$ 时等号成立，所以严格不等式来自 $k \geq 2$ 的各项。
- 忘记 $1/e$ 展开式中尾项的符号：它之所以是 $-g(2n)$，只因为 $2n$ 是偶数。
- 停在“N_n 很小”这一步：要得出矛盾，还需要 $N_n > 0$，这正是 (i) 和 (ii) 中下界重要的原因。

STEP 之外

这是傅里叶（Fourier）证明 e 为无理数的经典方法，并通过把 $e^2 = p/q$ 拆成 $qe = p/e$ 加以推广，使两个级数都快速收敛（converge）。同一思路经过更细致的处理，可证明对

每个非零有理数 r，e^r 都是无理数；刘维尔（Liouville）亦用它证明了 e 不是任何整系数二次方程（quadratic equation）的根。估计级数尾项的界是大学一年级分析（analysis）的核心技巧；可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。