详细解答

# STEP III 2024，第 6 题

纯数学 · 线性微分方程

**STEP III 2024，第 6 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

## 关键思路

控制量（control）$u$ 以相同方式加到每一条方程上，所以坐标的任何一个系数总和为零的组合，都完全不受 $u$ 影响。只要选对这个组合，它的导数（derivative）就是它本身的倍数，因此无论 $u$ 怎样变化，它都会按指数（exponential）增长或衰减。指数函数除非一开始就是零，否则永远不会等于零，由此便得到必要条件（necessary condition）。当这些条件成立时，运动就简化为单一条一阶（first-order）方程，而我们可以用常数 $u$ 把它解出来。

## 解答

### 第 (i) 部分

**(a)** 把两条方程相减，含 $u$ 的项互相抵消：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (-x + 3y + u) - (x + y + u) = -2(x - y).$$

因此 $w = x - y$ 满足 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -2w$，于是对任何函数 $u$，都有

$$x - y = (x_0 - y_0)\,\mathrm{e}^{-2t}$$

若质点在某个 $t > 0$ 时位于原点，则该时刻 $x - y = 0$。由于 $\mathrm{e}^{-2t} \neq 0$，这迫使 $x_0 - y_0 = 0$，即 $x_0 = y_0$。

**(b)** 当 $x_0 = y_0$ 时，(a) 的公式给出对所有 $t$ 都有 $x - y = 0$，所以质点一直留在直线 $y = x$ 上。把 $y = x$ 代入第一条方程，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x + u.$$

当 $u$ 为常数时，这是一条常系数线性方程。其特解（particular solution）为常数 $-\frac{1}{2}u$，所以

$$x = -\tfrac{1}{2}u + \left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2t}.$$

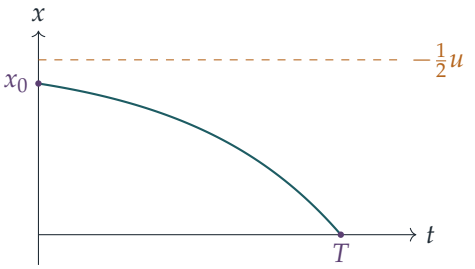
我们需要 $x(T) = 0$（这时 $y(T) = x(T) = 0$ 亦随之成立）：

$$\left(x_0 + \tfrac{1}{2}u\right)\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u \quad\Longrightarrow\quad x_0\,\mathrm{e}^{2T} = \tfrac{1}{2}u\left(1 - \mathrm{e}^{2T}\right).$$

由于 $T > 0$，$\mathrm{e}^{2T} \neq 1$，所以可以相除：

$$\boxed{u = -\frac{2x_0\,\mathrm{e}^{2T}}{\mathrm{e}^{2T} - 1}}$$

这个正负号是合理的。若不加控制，$\dot{x} = 2x$ 会把质点推离原点，所以 $u$ 必须朝与 $x_0$ 相反的方向推。（若 $x_0 = 0$，质点在 $u = 0$ 时已静止于原点。）




图中所示为 $x_0 = 1$、$T = 1$ 的情况。质点从不稳定平衡点（unstable equilibrium）$x = -\frac{1}{2}u$ 稍下方出发，被推离该点，并恰好在时间 $T$ 到达原点。

### 第 (ii) 部分

**(a)** 仿照第 (i) 部分，我们寻找一个 $ax + by + cz$，其中 $a + b + c = 0$（使 $u$ 抵消），而且它的导数是它本身的倍数。“$x$，然后 $-2y$，然后 $z$”这个规律提示我们取 $w = x - 2y + z$：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= (4y - 5z + u) - 2(x - 2z + u) + (x - 2y + u)\\ &= -x + 2y - z = -w.\end{aligned}$$

因此无论 $u$ 是甚么，都有 $x - 2y + z = (x_0 - 2y_0 + z_0)\,\mathrm{e}^{-t}$。在原点处 $w = 0$，而 $\mathrm{e}^{-t} \neq 0$，所以 $x_0 - 2y_0 + z_0 = 0$。也就是说，$y_0 = \frac{1}{2}(x_0 + z_0)$，即 $x_0$ 与 $z_0$ 的平均值。

> **想一想** 是否还有第二个同样不受 $u$ 影响的组合?

最后两条方程都含有 $x + u$，所以把它们相减，可以同时消去 $x$ 和 $u$。设 $v = y - z$，则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = (x - 2z + u) - (x - 2y + u) = 2(y - z) = 2v,$$

所以 $y - z = (y_0 - z_0)\,\mathrm{e}^{2t}$。

**(b)** 若质点在某个 $t > 0$ 时位于原点，则该时刻 $v = 0$。由于 $\mathrm{e}^{2t} \neq 0$，得 $y_0 = z_0$。结合 (a)，有 $x_0 = 2y_0 - z_0 = y_0$，所以 $x_0 = y_0 = z_0$。

**(c)** 当 $x_0 = y_0 = z_0$ 时，$w$ 和 $v$ 的初始值都是 0，所以对所有 $t$ 它们都保持为 0：$y = z$，从而 $x = 2y - z = y$。质点沿直线 $x = y = z$ 运动，而每条方程都变成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 4x - 5x + u = -x + u$$

（第二和第三条方程给出 $x - 2x + u$，结果相同）。当 $u$ 为常数时，

$$x = u + (x_0 - u)\,\mathrm{e}^{-t}.$$

令 $x(T) = 0$，得 $u\left(1 - \mathrm{e}^{-T}\right) = -x_0\,\mathrm{e}^{-T}$。由于 $T > 0$，可以相除；再把分子分母同乘 $\mathrm{e}^{T}$，得

$$\boxed{u = -\frac{x_0}{\mathrm{e}^{T} - 1}}$$

这里不受控制的运动 $\dot{x} = -x$ 本身已会衰减趋向原点，但只是在 $t \to \infty$ 时才到达。只需一个朝向原点的小推动（当 $T \to \infty$ 时趋于零），就能令质点在有限时间内到达原点。

## 验算

- 极限：当 $T \to \infty$ 时，(ii)(c) 的答案趋于 0，与自然衰减相符；而 (i)(b) 的答案趋于 $-2x_0$，这使 $x_0 = -\frac{1}{2}u$ 成为平衡点。质点于是停留在那里，永远不会到达原点，这正是有限的 $T$ 需要绝对值稍大的 $u$ 的原因。当 $T \to 0^{+}$ 时，两个答案都趋于无穷大，这是应有的结果。
- 数值验算：取 $x_0 = 1$、$T = 1$，第 (i)(b) 部分给出 $u \approx -2.3130$，用数值方法逐步推进方程，在 $t = 1$ 时落在 $(0, 0)$，误差在 $10^{-8}$ 以内。(ii)(c) 取 $u = -1/(\mathrm{e} - 1) \approx -0.5820$ 时亦同样成立。此外，亦验证了当 $u$ 是随时间变化的非常数函数时，不变量（invariant）$x - y$、$x - 2y + z$ 和 $y - z$ 仍然按各自的指数函数变化。

## 常见错误

- 在 (i)(a) 或 (ii)(a)、(b) 中假设 $u$ 为常数。这些部分针对的是*任何* $u$，而 $u$ 被抵消正是整个关键所在。
- 在 (i)(b) 和 (ii)(c) 中，忘记说明*为甚么*对所有时间都有 $y = x$（或 $x = y = z$）。这是由初始值为零的指数公式得出的。

## STEP 之外

这是对控制理论（control theory）的初步体验。把系统写成 $\dot{\mathbf{r}} = A\mathbf{r} + \mathbf{b}u$，我们找到的组合就是 $A$ 的左特征向量（left eigenvector），而且与 $\mathbf{b}$ 正交（orthogonal），所以任何控制都无法影响它们。卡尔曼（Kalman）的秩条件（rank condition）决定是否每个状态都能被引导到原点。这里该条件不成立，这正是为甚么只有特殊的起点才可行。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）涵盖特征向量方面的内容，而 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）则涵盖常微分方程的线性系统。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。