详细解答

STEP III 2024，第 5 题

纯数学 · 矩阵微分方程

STEP III 2024，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

本题在 *Beyond STEP* 第 7.7 节永恒不变的量中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch07/lax-pairs.html

关键思路

一切都取决于迹（trace）的两个性质：它是线性（linear）的，而且 $\operatorname{tr}(\mathbf{XY}) = \operatorname{tr}(\mathbf{YX})$。第 (ii) 部分给出行列式（determinant）变化率的公式，即雅可比公式（Jacobi's formula）。它把“$\det \mathbf{M}$ 是否不变?”转化为“某个迹是否为零?”。在 (iii) 中，交换子（commutator）$\mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 的迹必定为零，由此得到全部三个不变量（invariants）。在 (iv) 中，同一条公式表明 $\operatorname{tr} \mathbf{N}$ 量度的是 $\ln|\det \mathbf{M}|$ 的变化快慢，于是问题变成：一个矩阵能否迹不变而行列式改变?

解答

第 (i) 部分

设 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 及 $\mathbf{N} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$。$\mathbf{MN}$ 的对角元素是 $ap + br$ 和 $cq + ds$，而 $\mathbf{NM}$ 的对角元素是 $pa + qc$ 和 $rb + sd$。所以

$$\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = ap + br + cq + ds = \operatorname{tr}(\mathbf{NM}).$$

此外，$\mathbf{M} + \mathbf{N}$ 的对角元素是 $a + p$ 和 $d + s$，所以

$$\operatorname{tr}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}) + \operatorname{tr}(\mathbf{N}).$$

同理，对纯量 k 有 $\operatorname{tr}(k\mathbf{M}) = k\operatorname{tr}(\mathbf{M})$，而 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$ 的迹等于 $\operatorname{tr}\mathbf{M}$ 的导数。下文会随意使用这些性质。

第 (ii) 部分

元素 a, b, c, d 均随 t 而变（撇号表示 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$），由乘积法则（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(ad - bc) = a'd + ad' - b'c - bc'.$$

由于 $\mathbf{M}$ 是非奇异（non-singular）矩阵，$\mathbf{M}^{-1} = \dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，而

$$\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \frac{1}{\det\mathbf{M}}\begin{pmatrix} da' - bc' & * \\ * & -cb' + ad' \end{pmatrix}.$$

它的迹是 $\dfrac{a'd + ad' - b'c - bc'}{\det\mathbf{M}}$，即 $\dfrac{1}{\det\mathbf{M}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M})$，得证。

第 (iii) 部分

行列式。由 (ii) 及迹的线性，

$$\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\big(\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM})\big) = \operatorname{tr}(\mathbf{N}) - \operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{NM}).$$

对两个矩阵 $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}$ 和 $\mathbf{M}$ 应用 (i)，得 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}\,\mathbf{M}) = \operatorname{tr}(\mathbf{M}\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{N}) = \operatorname{tr}(\mathbf{N})$。所以右方为零。由于 $\det\mathbf{M} \neq 0$，得 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}) = 0$。

迹。由 (i)，$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{tr}(\mathbf{M}) = \operatorname{tr}\Big(\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\Big) = \operatorname{tr}(\mathbf{MN}) - \operatorname{tr}(\mathbf{NM}) = 0$。

平方的迹。只要保持因子的次序，乘积法则对矩阵同样成立：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}\mathbf{M} + \mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t} = (\mathbf{MN} - \mathbf{NM})\mathbf{M} + \mathbf{M}(\mathbf{MN} - \mathbf{NM}) \\ &= \mathbf{M}^2\mathbf{N} - \mathbf{NM}^2,\end{aligned}$$

因为两个 $\mathbf{MNM}$ 项互相抵消。这同样是交换子的形式，只是以 $\mathbf{M}^2$ 代替 $\mathbf{M}$，所以由 (i) 知其迹为零。因此 $\operatorname{tr}(\mathbf{M}^2)$ 亦是常数。三个量都与 t 无关。

> ? **想一想** 当 $\mathbf{N}$ 也随 t 而变时，怎样解 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$?

把 $\mathbf{N}$ 中与一切矩阵都可交换的部分分拆出来。写 $\mathbf{N} = t\mathbf{I} + t\mathbf{J}$，其中 $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$。单位

矩阵与 $\mathbf{M}$ 可交换，所以 $\mathbf{MN}-\mathbf{NM}=t(\mathbf{MJ}-\mathbf{JM})$。设 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则

$$\mathbf{MJ}-\mathbf{JM}=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c & a-d\\ 0 & c\end{pmatrix}.$$

比较元素，得四条纯量方程：

$$a'=-tc,\qquad b'=t(a-d),\qquad c'=0,\qquad d'=tc.$$

以 $t=0$ 时的值 A,B,C,D 依次求解：

- $c'=0$，所以 $c=C$。
- 于是 $a'=-Ct$ 及 $d'=Ct$，所以 $a=A-\frac{1}{2}Ct^2$ 及 $d=D+\frac{1}{2}Ct^2$。
- 现在 $a-d=A-D-Ct^2$，所以 $b'=(A-D)t-Ct^3$，得 $b=B+\frac{1}{2}(A-D)t^2-\frac{1}{4}Ct^4$。

因此

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}A-\frac{1}{2}Ct^2 & B+\frac{1}{2}(A-D)t^2-\frac{1}{4}Ct^4\\ C & D+\frac{1}{2}Ct^2\end{pmatrix}.$$

验算一下：迹是 $A+D$，而展开 $ad-bc$ 可见 t 的各次幂全部抵消，剩下 $AD-BC$。这与本部分前半的结果一致。

第 (iv) 部分

现在 $\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t=\mathbf{MN}$，所以 $\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t=\mathbf{N}$，而 (ii) 给出

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N})=\frac{1}{\det\mathbf{M}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\det\mathbf{M}).$$

所以对所有 t 有 $\operatorname{tr}\mathbf{N}=0$，当且仅当 $\det\mathbf{M}$ 是常数。迹不变并不能说明行列式的任何情况，所以答案应该是否。要证明这一点，只需一个反例（counterexample）。

> ? **想一想** 题目只通过微分方程给出 $\mathbf{N}$，我们该怎样构造反例?

倒过来做。任取一个非奇异的 $\mathbf{M}(t)$，使其迹为非零常数而行列式不是常数，然后定义 $\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}\,\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$。这样方程便自动成立。取

$$\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1 & t\\ -t & 1\end{pmatrix},\qquad \operatorname{tr}\mathbf{M}=2,\qquad \det\mathbf{M}=1+t^2\neq 0.$$

于是

$$\mathbf{N}=\mathbf{M}^{-1}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}1 & -t\\ t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{1+t^2}\begin{pmatrix}t & 1\\ -1 & t\end{pmatrix}.$$

乘出来可确认 $\mathbf{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t$。此外 $\mathbf{N}$ 是非奇异的，因为 $\det \mathbf{N} = 1/(1+t^2)$。然而

$$\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = \frac{2t}{1+t^2},$$

对每个 $t \neq 0$ 都不为零。所以 $\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$ 不一定成立。真正必然成立的是 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}(\mathrm{d}\mathbf{M}/\mathrm{d}t) = 0$，这是另一回事。

验算

- 在 (iii) 中，取 $A = 1$、$B = 0$、$C = 2$、$D = 3$ 及 $t = 1$。公式给出 $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{2} \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$，其迹为 4，行列式为 3，与 $t = 0$ 时相同。它的平方的迹是 $0 - 3 - 3 + 16 = 10$，而初始矩阵的也是：$1 + 0 + 0 + 9 = 10$。
- 对随机的 A, B, C, D，(iii) 中 $\mathbf{M}$ 的公式与电脑数值积分该微分方程的结果吻合至小数点后八位。以随机且随时间变化的 $\mathbf{N}$ 进行同样的积分时，三个不变量都保持不变。
- 在 (iv) 中，当 $t = 1$ 时，$\mathbf{N} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，其迹为 1；而 $\det \mathbf{M} = 1 + t^2$ 在该处的对数导数（logarithmic derivative）是 $2t/(1+t^2) = 1$，正如 (ii) 所预测。

常见错误

- 写成 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{M}^2) = 2\mathbf{M}\frac{\mathrm{d}\mathbf{M}}{\mathrm{d}t}$：矩阵不一定可交换，所以两种次序都必须保留。
- 以为 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = \operatorname{tr}\mathbf{M}\operatorname{tr}\mathbf{N}$。这是错的。成立的只有线性法则和循环法则（cyclic rule）。
- 在 (iv) 中，由 $\operatorname{tr}(\mathbf{MN}) = 0$ 直接推出 $\operatorname{tr}(\mathbf{N}) = 0$。答“否”需要一个明确的反例。

STEP 之外

第 (ii) 部分是雅可比公式在 2×2 的情况，该公式对 $n \times n$ 矩阵都成立。配合 $\mathbf{M}' = \mathbf{MN}$，它给出 $\det \mathbf{M}(t) = \det \mathbf{M}(0) \exp \int_0^t \operatorname{tr}\mathbf{N}$。当 $\mathbf{N}$ 是常数时，这就变成著名的恒等式 $\det e^{\mathbf{N}} = e^{\operatorname{tr}\mathbf{N}}$。形如 $\mathbf{M}' = \mathbf{MN} - \mathbf{NM}$ 的方程称为 Lax 方程（Lax equations）。$\operatorname{tr}(\mathbf{M}^k)$ 这些量总是守恒（conserved）的，这正是它们出现在可积系统（integrable systems）理论中的原因。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）是阅读迹、行列式和矩阵指数（matrix exponential）的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。