详细解答

STEP III 2024，第 4 题

纯数学 · 抛物线的切线

STEP III 2024，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

一切都取决于两直线夹角的 tan 公式，而这其实只是 $\tan(A-B)$ 公式换了个面貌。一旦知道在 $x=p$ 和 $x=q$ 处的切线（tangent）相交于点 (X,Y)，而 $p+q$ 和 pq 都可以用 X 和 Y 表示，那么任何关于夹角的条件（涉及 $(p-q)^2$ 和 pq）都可以单纯用 X 和 Y 改写。改写后的条件就是所求的轨迹（locus）。

解答

第 (i) 部分

设两直线与 x 轴正方向分别成 α 角和 β 角，于是 $m_1=\tan\alpha$，$m_2=\tan\beta$（两直线都有斜率（gradient），所以都不是铅垂线）。两直线的夹角在不计正负号及加上 180° 的倍数的意义下等于 $\alpha-\beta$。若两者之间的锐角为 45°，则 $\alpha-\beta$ 等于 $\pm45^\circ$ 加上 180° 的某个倍数；由于 tan 的周期为 180°，

$$\tan(\alpha-\beta)=\tan(\pm45^\circ)=\pm1.$$

特别地，$\cos(\alpha-\beta)\neq0$，所以复角公式（compound-angle formula）适用，且 $1+m_1m_2\neq0$：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

因此 $\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm1$，得证。更一般地，两直线之间的锐角 θ 满足 $\tan\theta=\left|\dfrac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$，我们会在第 (iii) 部分用到这一点。

第 (ii) 部分

在 C 上有 $y=\dfrac{x^2}{4a}$，所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{2a}$。在 $(p,\frac{p^2}{4a})$ 处的切线为

$$y-\frac{p^2}{4a}=\frac{p}{2a}(x-p)\quad\Longleftrightarrow\quad y=\frac{p}{2a}x-\frac{p^2}{4a},$$

同样，在 $x=q$ 处的切线为 $y=\dfrac{q}{2a}x-\dfrac{q^2}{4a}$。两式相减，

$$\frac{p-q}{2a}\,x=\frac{p^2-q^2}{4a}=\frac{(p-q)(p+q)}{4a}.$$

由于 $p\neq q$，可以除以 $p-q$，得 $x=\frac{1}{2}(p+q)$，得证。代入第一条切线，

$$y=\frac{p(p+q)}{4a}-\frac{p^2}{4a}=\frac{pq}{4a}.$$

所以两切线相交于

$$(X,Y)=\left(\tfrac{1}{2}(p+q),\,\frac{pq}{4a}\right),\qquad\text{所以}\qquad p+q=2X,\quad pq=4aY.\qquad(*)$$

现在假设在 $x=p$ 和 $x=q$ 处的切线互成 45°。它们显然是不同的直线，所以 $p\neq q$，且 $(*)$ 成立。两者的斜率为 $m_1=\frac{p}{2a}$ 和 $m_2=\frac{q}{2a}$，所以

$$\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{(p-q)/(2a)}{1+pq/(4a^2)}=\frac{2a(p-q)}{4a^2+pq}.$$

由第 (i) 部分，此式等于 ±1；平方后可消去正负号：

$$4a^2(p-q)^2=(4a^2+pq)^2.$$

> **想一想** 条件涉及的是 $p-q$ 而不是 $p+q$，我们怎样消去 p 和 q?

利用 $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq$，这是对称（symmetric）的表达式，所以可以应用 $(*)$：

$$(p-q)^2=4X^2-16aY,\qquad 4a^2+pq=4a^2+4aY=4a(a+Y).$$

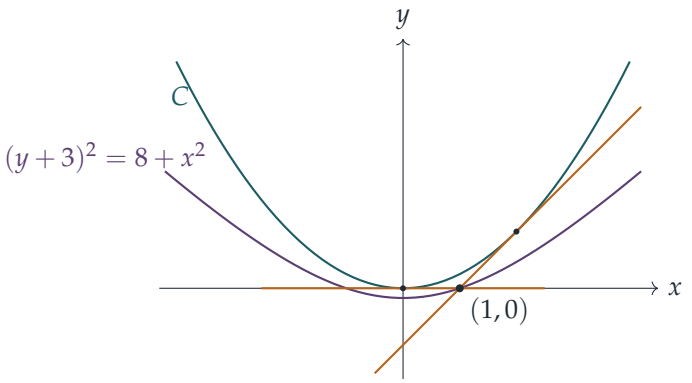
条件变成

$$4a^2\left(4X^2-16aY\right)=16a^2(a+Y)^2.$$

两边除以 $16a^2$（因为 $a\neq0$，所以可以这样做），

$$X^2-4aY=Y^2+2aY+a^2,$$
$$\text{所以}\qquad X^2+8a^2=Y^2+6aY+9a^2=(Y+3a)^2.$$

因此交点位于 $(y+3a)^2=8a^2+x^2$ 上，得证。



取 $a = 1$：在 $x = 2$ 处（斜率 1）和 $x = 0$ 处（斜率 0）的切线互成 45°，两者相交于 $(1, 0)$，这点位于双曲线（hyperbola）的上支上。

第 (iii) 部分

设 (X, Y) 是 $(y + 7a)^2 = 48a^2 + 3x^2$ 上的一点，而 C 在 $x = p$ 和 $x = q$ $(p \neq q)$ 处的两条切线相交于此点，所以 $(*)$ 成立。根据第 (i) 部分末尾的说明，两切线之间的锐角 θ 满足

$$\tan^2\theta = \left(\frac{2a(p-q)}{4a^2+pq}\right)^2 = \frac{4a^2(4X^2-16aY)}{16a^2(a+Y)^2} = \frac{X^2-4aY}{(Y+a)^2},$$

这里用了与第 (ii) 部分相同的代换。（若 $Y = -a$，两切线会互相垂直；下面会证明这在此曲线上不可能发生。）

? **想一想** 曲线的方程怎样帮助我们处理 $X^2 - 4aY$?

展开曲线的方程：$Y^2 + 14aY + 49a^2 = 48a^2 + 3X^2$，即

$$3X^2 = Y^2 + 14aY + a^2.$$

于是

$$3(X^2 - 4aY) = Y^2 + 14aY + a^2 - 12aY = Y^2 + 2aY + a^2 = (Y + a)^2.$$

由此得出两个结果。第一，$Y \neq -a$：否则 $X^2 - 4aY = 0$，即 $X^2 = -4a^2$，但 $a \neq 0$，这是不可能的。所以 $X^2 - 4aY = \frac{1}{3}(Y + a)^2 > 0$，这也确认了该点位于 C 之外：以 p 和 q 为根的二次方程 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$ 有两个相异实根，所以经过曲线上每一点确实都有两条切线。第二，

$$\tan^2\theta = \frac{\frac{1}{3}(Y+a)^2}{(Y+a)^2} = \frac{1}{3}.$$

所以无论该点位于曲线上何处，都有 $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$：两切线之间的锐角是常数，等于 30°。

验算

- 取 $a = 1$，在 $x = 2$ 和 $x = 0$ 处的切线分别是 $y = x - 1$ 和 $y = 0$，互成 45°。它们相交于 $(1, 0)$，而 $(0 + 3)^2 = 9 = 8 + 1^2$。
- 对于第 (iii) 部分，取 $a = 1$ 及 $X = 0$：则 $(Y + 7)^2 = 48$，所以 $Y = 4\sqrt{3} - 7 \approx -0.072$。经过 $(0, Y)$ 的切线在 $x = \pm\sqrt{-4Y} \approx \pm 0.536$ 处与曲线相切，斜率为 ± 0.268。由于 $\tan 15^\circ \approx 0.268$，每条切线与水平线成 15°，两者相差 30°。
- 用电脑对一千个随机的 a 值以及每条双曲线两支上的点进行检验，确认了 45° 和 30° 的结果。

常见错误

- 试图分别解出 p 和 q。其实只需要对称组合 $p + q$ 和 pq，再配合 $(p - q)^2 = (p + q)^2 - 4pq$。
- 在第 (i) 部分忘记 $\pm$：把条件平方后，45° 角的两种方向都得以保留，正因如此才得到单一条方程。
- 在第 (iii) 部分，约去之前没有检查 $Y + a \neq 0$。

STEP 之外

从点 (X, Y) 到抛物线（parabola）的切线由二次方程 $t^2 - 2Xt + 4aY = 0$ 决定，而使两切线以固定角度相交的点的轨迹总是一条双曲线（当角度为 90° 时，它退化为准线（directrix）$y = -a$）。这些概念属于射影几何（projective geometry），其中极点与极线（pole–polar）的关系把一个点与它的切点弦（chord of contact）联系起来。如想做更多同类型的题目，并参考如何入手的评注，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。