详细解答

STEP III 2024，第 3 题

纯数学 · 单调函数与导数

STEP III 2024，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

一切都取决于一个导数（derivative）。把 g 求导并通分后，分子（numerator）会化简成一个关于 x 的线性（linear）式子，因此它的正负一眼就能看出。与第 (iii) 部分的联系在于：g 恰好就是 $\ln f$ 的导数。所以 g 的正负（第 (ii) 部分的草图把它直观地呈现出来）决定了 f 是上升还是下降。

解答

第 (i) 部分

由于 $x>0$，可写成 $\ln(1+\frac{1}{x})=\ln(x+1)-\ln x$。于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x(x+1)}=-\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)^2},$$

而以分母（denominator）x^2+x 运用商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{x+c}{x^2+x}=\frac{(x^2+x)-(x+c)(2x+1)}{x^2(x+1)^2}=\frac{-x^2-2cx-c}{x^2(x+1)^2}.$$

两式相减，x^2 项互相抵消：

$$\mathrm{g}'(x)=\frac{-x^2-x+x^2+2cx+c}{x^2(x+1)^2}=\frac{(2c-1)x+c}{x^2(x+1)^2}.$$

分母为正，所以 $\mathrm{g}'(x)$ 的正负与 $N(x)=(2c-1)x+c$ 的正负相同。

(a) 若 $c\geq\frac{1}{2}$，则 $(2c-1)x\geq 0$ 且 $c\geq\frac{1}{2}>0$，所以对每个 $x>0$ 都有 $N(x)>0$。因此对所有 $x>0$，斜率（gradient）均为正。

(b) 若 $0 \le c < \frac{1}{2}$，则 $1-2c>0$，而

$$N(x)<0 \iff (1-2c)x > c \iff x > \frac{c}{1-2c}.$$

所以斜率为负当且仅当 $x > \frac{c}{1-2c}$。（当 $c=0$ 时，这就是所有 $x>0$。）记 $x_0 = \frac{c}{1-2c}$。当 $c>0$ 时，g 在 $(0, x_0]$ 上递增，在 $[x_0, \infty)$ 上递减。

第 (ii) 部分

我们还需要知道 x 很大时的情况。g 的两项都趋向 0，所以 $g(x) \to 0$，但草图应该显示它从哪一侧趋近。利用 $\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots$，取 $t = \frac{1}{x}$，再加上 $\frac{x+c}{x(x+1)} = \left(\frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x} + \cdots\right) = \frac{1}{x} + \frac{c-1}{x^2} + \cdots$，得到

$$g(x) = \frac{\frac{1}{2} - c}{x^2} + \cdots \quad \text{对很大的} x.$$

想一想 若 g 递增并趋向 0，它必定位于轴的哪一侧?

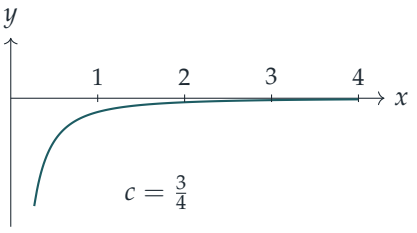
它必定在轴下方。若 g 严格递增，则对任何 x，所有 $y > x$ 都有 $g(x) < g(y)$；令 $y \to \infty$ 便得 $g(x) < 0$（严格不等，因为 $g(x) < g(x+1) \le 0$）。同理，一个趋向 0 的严格递减函数必定为正。

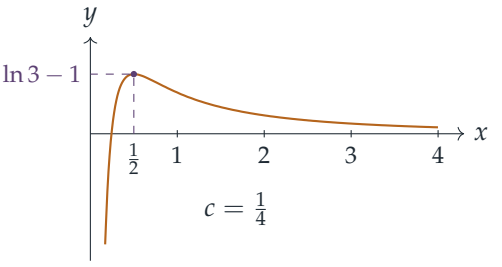
(a) $c = \frac{3}{4}$。由 (i)(a)，g 处处递增。它从 $-\infty$（当 $x \to 0$）上升趋向 0，并一直留在轴下方。它以 $-\frac{1}{4x^2}$ 的方式趋近，所以永不穿过轴，也没有转向点。例如 $g(1) = \ln 2 - \frac{7}{8} \approx -0.18$。

(b) $c = \frac{1}{4}$。这时 $x_0 = \dfrac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$。曲线从 $-\infty$ 上升至 $x = \frac{1}{2}$ 处的极大值，其中

$$g\left(\tfrac{1}{2}\right) = \ln 3 - \frac{3/4}{3/4} = \ln 3 - 1 \approx 0.099 > 0.$$

之后它从上方以 $\frac{1}{4x^2}$ 的方式递减趋向 0。在 $[\frac{1}{2}, \infty)$ 上它递减至 0，所以在那里为正。在 $(0, \frac{1}{2})$ 上它从 $-\infty$ 递增至一个正值，所以恰好穿过轴一次，位置略小于 $\frac{1}{4}$（数值上 $x \approx 0.243$）。





（两图的纵向比例不同：右图经过拉伸，好让那个细小的正值隆起看得见。两图中 y 轴都是渐近线（asymptote）。）

第 (iii) 部分

由于对 $x > 0$ 有 $\mathrm{f}(x) > 0$，我们可以取对数（logarithm）：

$$\ln \mathrm{f}(x) = (x + c) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

用积法则（product rule）求导，并利用 (i) 中的导数，

$$\frac{\mathrm{f}'(x)}{\mathrm{f}(x)} = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + (x + c) \cdot \left(-\frac{1}{x(x+1)}\right) = \mathrm{g}(x).$$

所以 $\mathrm{f}'(x) = \mathrm{f}(x)\,\mathrm{g}(x)$，又因 $\mathrm{f}(x) > 0$，f' 与 g 同号。另外留意，对每个 c，当 $x \to \infty$ 时 $\mathrm{g}(x) \to 0$，因为它的两项都趋向 0。

(a) $c \geq \frac{1}{2}$。由 (i)(a)，g 在 $x > 0$ 上严格递增并趋向 0。由 (ii) 中方框之后的论证，对所有 $x > 0$ 有 $\mathrm{g}(x) < 0$。因此 $\mathrm{f}'(x) < 0$，f 是递减的。

(b) $0 < c < \frac{1}{2}$。由 (i)(b)，g 在 $[x_0, \infty)$ 上严格递减并趋向 0，所以在那里 $\mathrm{g} > 0$；特别地 $\mathrm{g}(x_0) > 0$。在 $(0, x_0]$ 上，g 连续（continuous）且严格递增，而当 $x \to 0$ 时 $\mathrm{g}(x) \to -\infty$（题目已给出，因为 $c > 0$）。因此它恰好在一点 $x_1 \in (0, x_0)$ 取值 0，并在 $(0, x_1)$ 上 $\mathrm{g} < 0$，在 (x_1, ∞) 上 $\mathrm{g} > 0$。所以 $\mathrm{f}'(x_1) = 0$，而 f' 在该处由负变正。因此 f 在 x_1 有一个转向点（turning point）（极小值）。

> ? **想一想** 为甚么单凭 $\mathrm{f}'(x_1) = 0$ 并不足够?

驻点（stationary point）不一定是转向点（想想 $y = x^3$ 在原点的情况）。令 x_1 成为转向点的，是 f' 的变号，而这正是 g 的形状所提供的。

(c) $c = 0$。这时对所有 $x > 0$ 有 $\mathrm{g}'(x) = \dfrac{-x}{x^2(x+1)^2} < 0$，所以 g 严格递减并趋向 0。因此对所有 $x > 0$ 有 $\mathrm{g}(x) > 0$，于是 $\mathrm{f}'(x) > 0$，而 $\mathrm{f}(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 是递增的。

验算

- 在某一点以数值方法对 g 求导，例如 $x = 1$、$c = \frac{1}{4}$：公式给出 $\mathrm{g}'(1) = \frac{-1/2+1/4}{4} = -\frac{1}{16}$，与差商（difference quotient）吻合。
- $c = \frac{1}{4}$：$\mathrm{g}(0.2) \approx -0.083$ 而 $\mathrm{g}(0.3) \approx 0.056$，与在 0.243 附近唯一一次穿过轴一致。对 $c = \frac{3}{4}$，$\mathrm{g}(3) \approx -0.025$，仍然刚好在轴下方。
- 在 (iii)(b) 中取 $c = \frac{1}{4}$，f 的极小值位于同一个 $x \approx 0.243$；用电脑在细密网格上检查 f，对 $(0, \frac{1}{2})$ 中多个 c 值都恰好找到一个转向点。
- 对 $c = 0$，$\mathrm{f}(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ 递增至 e；对 $c = 1$，$(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ 递减至 e。这正是大家熟悉、从两边夹住 e 的那对数列（sequences）。

常见错误

- 单凭“g 递增”就断定 $g < 0$。你还需要当 $x \to \infty$ 时的极限 $g \to 0$。
- 在 (ii)(b) 中把曲线画成一直为负。极大值 $\ln 3 - 1$ 虽小但为正，所以曲线必须穿过轴，然后从上方回落趋近轴。
- 对 $(1 + \frac{1}{x})^{x+c}$ 求导时把指数当作常数。应先取对数。

STEP 之外

$(1 + \frac{1}{x})^x$ 递增而 $(1 + \frac{1}{x})^{x+1}$ 递减、两者都趋向 e，这是大学一年级证明定义 e 的极限存在的经典方法。它是单调收敛定理（monotone convergence theorem）的一个例子。这道题找出了行为转变的精确临界值 $c = \frac{1}{2}$，而展开式 $g(x) \approx (\frac{1}{2} - c)/x^2$ 解释了原因。想进一步了解单调数列与极限，可以读 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。