详细解答

STEP III 2024，第 2 题

纯数学 · 不等式与绝对值

STEP III 2024，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

本题中每个平方根（square root）内的式子都是恒为正的二次式（quadratic），而且每条不等式（inequality）的两边都是非负的，所以我们可以两边平方而不改变解集（solution set）。平方之后，每个问题都变成关于某个二次式正负号的命题（或者当 x^2 项互相抵消时，变成关于一个线性函数（linear function）的命题）。从几何角度看，$y = \sqrt{4x^2 - 8x + 64}$ 是一条双曲线（hyperbola）的上半部分，而题目中的直线则是它的弦（chord）和渐近线（asymptote）。

解答

第 (i) 部分

配方（completing the square）得 $4x^2 - 8x + 64 = 4(x-1)^2 + 60 > 0$，所以平方根对所有 x 都有定义。每条不等式的两边都是非负的，而对于 $A, B \geq 0$，我们有 $A \leq B \iff A^2 \leq B^2$。

(a) 两边平方，

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq x^2 + 16x + 64 &\iff 3x^2 - 24x \leq 0 \\ &\iff 3x(x-8) \leq 0 \iff 0 \leq x \leq 8. \end{aligned}$$

(b) 两边平方，

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8x + 64 \leq 9x^2 - 48x + 64 &\iff 0 \leq 5x^2 - 40x \\ &\iff 5x(x-8) \geq 0 \iff x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 8. \end{aligned}$$

在两部分中，等号都在 $x = 0$（各边均等于 8）和 $x = 8$（各边均等于 16）时成立。

第 (ii) 部分

(a) 利用平方差（difference of two squares），

$$\left(\sqrt{4x^2-8x+64}+2(x-1)\right)\mathrm{f}(x)=(4x^2-8x+64)-4(x-1)^2=60.$$

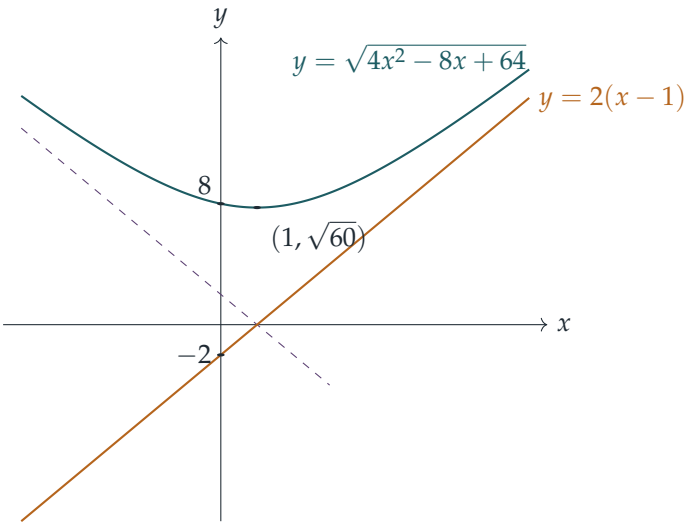
当 $x>1$ 时，括号内的式子为正，所以可以相除：

$$\mathrm{f}(x)=\frac{60}{\sqrt{4x^2-8x+64}+2(x-1)}.$$

当 $x\to\infty$ 时，分母至少为 $2(x-1)$，而它趋向无穷大，所以 $\mathrm{f}(x)\to 0$，正如所求。

(b) 设 $y=\sqrt{4(x-1)^2+60}$。那么 $y>0$ 且 $y^2-4(x-1)^2=60$，所以这条曲线是一条以 $(1,0)$ 为中心的双曲线的上支。它关于 $x=1$ 对称，在 $x=1$ 处取最小值 $\sqrt{60}=2\sqrt{15}\approx 7.75$，并与 y 轴相交于 $(0,8)$。

由于 $y>\sqrt{4(x-1)^2}=2|x-1|$，曲线严格位于两条直线 $y=\pm 2(x-1)$ 的上方。(a) 部分说明当 $x\to\infty$ 时，曲线趋近 $y=2(x-1)$。由关于 $x=1$ 的对称性，当 $x\to-\infty$ 时，曲线趋近 $y=-2(x-1)$。直线 $y=2(x-1)$ 的斜率（gradient）为 2，并经过 $(1,0)$ 和 $(0,-2)$。



虚线是另一条渐近线 $y=-2(x-1)$。

第 (iii) 部分

同样地，$4x^2-5x+4=4(x-\frac{5}{8})^2+\frac{39}{16}>0$，所以平方根总是有定义。把（非负的）两边平方，该不等式等价于

$$(m^2-4)x^2+(2mc+5)x+(c^2-4)\geq 0. \qquad (*)$$

想一想 $(*)$ 左边是甚么类型的式子，才可能恰好在 $x \geq 3$ 时非负?

若 $m^2 - 4 > 0$, 当 $x \to -\infty$ 时左边趋向 $+\infty$, 于是非常负的 x 也会满足 $(*)$。若 $m^2 - 4 < 0$, 当 $x \to +\infty$ 时左边趋向 $-\infty$，于是很大的 x 会不满足。两者都不容许，所以 $m^2 = 4$，而 $(*)$ 变成线性不等式。线性不等式 $ax + b \geq 0$ 的解集为 $\{x : x \geq 3\}$，当且仅当 $a > 0$ 且 $3a + b = 0$。

取 $m = 2$。那么 $a = 4c + 5$，$b = c^2 - 4$，所以我们需要

$$3(4c + 5) + c^2 - 4 = c^2 + 12c + 11 = (c + 1)(c + 11) = 0, \qquad 4c + 5 > 0.$$

根 $c = -11$ 给出 $a = -39 < 0$，不符合。根 $c = -1$ 给出 $a = 1 > 0$。所以

$$m = 2, \qquad c = -1$$

可行。验证一下：$(2x - 1)^2 - (4x^2 - 5x + 4) = x - 3$，它恰好在 $x \geq 3$ 时非负。（取 $m = -2$、$c = 1$ 会得到相同的 $|mx + c|$，同样成立。）

第 (iv) 部分

设 $g(x) = x^2 + px + q$，$L(x) = mx + c$。由于 $|g| \leq L \iff -L \leq g \leq L$，该不等式成立当且仅当以下两者同时成立：

$$g(x) - L(x) \leq 0 \qquad 及 \qquad g(x) + L(x) \geq 0.$$

$g - L$ 和 $g + L$ 都是首项系数（leading coefficient）为 1 的二次式。

- 使 $g - L \leq 0$ 的集合是一个闭区间 $[a, b]$（可能是空集或单一点）。
- 使 $g + L \geq 0$ 的集合是全体实数除去一个开区间 (r, s)。若 $g + L$ 没有实根，则甚么都不用除去。

所以解集是 $[a, b]$ 除去 (r, s)。要使它等于 $[-5, 1] \cup [5, 7]$，我们需要 $a = -5$ 及 $b = 7$（外侧两端），而被除去的空隙必须恰好是 $(1, 5)$，所以 $r = 1$，$s = 5$。因此

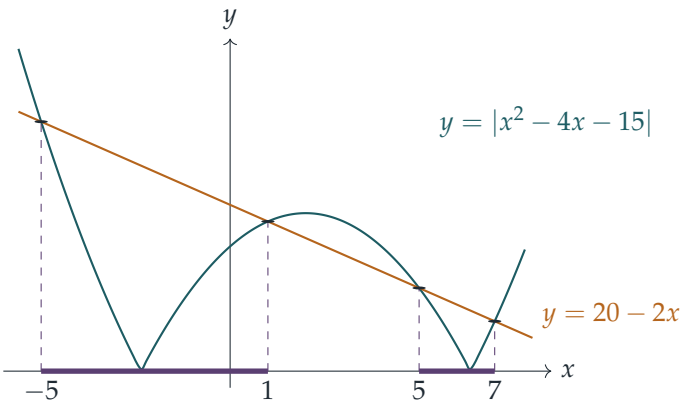
$$g(x) - L(x) = (x + 5)(x - 7) = x^2 - 2x - 35,$$
$$g(x) + L(x) = (x - 1)(x - 5) = x^2 - 6x + 5.$$

两式相加再除以二，得 $g(x) = x^2 - 4x - 15$。两式相减再除以二，得 $L(x) = -2x + 20$。因此

$$p = -4, \qquad q = -15, \qquad m = -2, \qquad c = 20.$$

以上每一步都是可逆的，所以取这些值时，解集确实是 $[-5, 1] \cup [5, 7]$：我们需要 $(x + 5)(x - 7) \leq 0$ 及 $(x - 1)(x - 5) \geq 0$。这些值也是唯一可行的值。

在图中，g 的根为 $2 \pm \sqrt{19} \approx -2.36,\ 6.36$。直线 $y = 20 - 2x$ 在 $x = -5$ 和 $x = 7$ 处与 $|g|$ 的外侧两臂相交，并在 $x = 1$ 和 $x = 5$ 处穿过被反射上来的拱形部分。



验算

- 在 (ii)(a) 中，当 $x = 100$ 时，$f(100) = \sqrt{39264} - 198 \approx 0.151$，与 $60/(\sqrt{39264} + 198) \approx 0.151$ 吻合。
- 在 (iv) 中，当 $x = 0$ 时：$|-15| = 15 \le 20$，所以 0 是解。当 $x = 3$ 时：$|9 - 12 - 15| = 18 > 14$，所以 3 不是解。当 $x = 8$ 时：$|64 - 32 - 15| = 17 > 4$，所以 8 不是解。这些都与 $[-5, 1] \cup [5, 7]$ 相符。用电脑在 x 的细密网格上检查，亦确认了全部四个解集。

常见错误

- 两边平方却没有说明为何可以这样做。这里之所以成立，只因为两边都是非负的。
- 在 (iii) 中保留真正的二次式。二次不等式的解集不可能是单侧的半直线，所以 x^2 项必须抵消。
- 在 (iv) 中把端点配对错了：外侧两端 $-5, 7$ 属于 $g - L$，而内侧两端 $1, 5$（即空隙）属于 $g + L$。

STEP 之外

曲线 $y^2 - 4(x-1)^2 = 60$ 是一条双曲线，而第 (ii) 部分展示了如何求渐近线：把曲线与候选直线之差有理化（rationalise）。同样的技巧——乘以“共轭式”（conjugate）——是大学一年级分析（analysis）中求极限的标准工具。像 (iv) 那样把 $|g| \le L$ 写成两个单侧条件，正是那里处理含绝对值（absolute value）不等式的惯常做法。Abbott 的 *Understanding*

Analysis（《理解分析》）是很好的下一步读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。