详细解答

# STEP III 2024，第 12 题

概率与统计 · 几何概率

**STEP III 2024，第 12 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

## 关键思路

若在单位正方形（unit square）内均匀（uniformly）随机选取一点，则 $\mathrm{P}(R \le r)$ 正是正方形内落在以原点为圆心、半径为 $r$ 的圆之内那部分的面积。当 $r > 1$ 时，圆会从正方形的两条边突出，而留在正方形内的区域可以整齐地分拆为两个直角三角形和一个扇形（sector）。至于期望值（expectation），先求导得出概率密度函数（density），再对 $rf(r)$ 积分；用一次分部积分（integration by parts）便能消去麻烦的 $\cos^{-1}$ 项，最后以双曲代换（hyperbolic substitution）完成计算。

## 解答

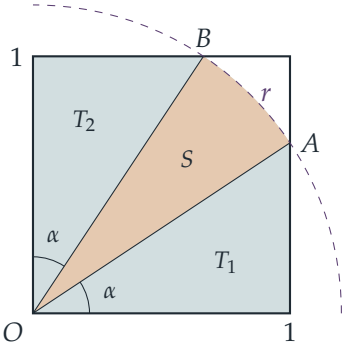
### 第 (i) 部分

由于概率等于面积，$\mathrm{P}(R \le r)$ 就是正方形内与 $O$ 的距离不超过 $r$ 的点所组成集合的面积。

当 $0 \le r \le 1$ 时，四分之一圆盘 $x, y \ge 0$，$x^2 + y^2 \le r^2$ 完全位于正方形之内，因此

$$\mathrm{P}(R \le r) = \tfrac{1}{4}\pi r^2 \qquad (0 \le r \le 1).$$

当 $1 \le r \le \sqrt{2}$ 时，圆 $x^2 + y^2 = r^2$ 与边 $x = 1$ 相交于 $A = (1, \sqrt{r^2 - 1})$，与边 $y = 1$ 相交于 $B = (\sqrt{r^2 - 1}, 1)$；由于 $0 \le \sqrt{r^2 - 1} \le 1$，这两点都在正方形上。设 $\alpha$ 为 $OA$ 与 $x$ 轴所成的角，则 $\cos\alpha = 1/r$，即 $\alpha = \cos^{-1}(r^{-1})$。由于图形关于 $y = x$ 对称，$OB$ 与 $y$ 轴所成的角同样是 $\alpha$。




正方形内位于圆内的部分由以下各部分组成：

- 顶点为 $O$、$(1,0)$、$A$ 的三角形 $T_1$：直角位于 $(1,0)$，两条直角边分别为 1 和 $\sqrt{r^2-1}$，故面积为 $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$；
- 顶点为 $O$、$(0,1)$、$B$ 的三角形 $T_2$：它是 $T_1$ 的镜像，面积同样是 $\frac{1}{2}\sqrt{r^2-1}$；
- 介于 $OA$ 与 $OB$ 之间、半径为 $r$ 的扇形 $S$，其圆心角为 $\frac{\pi}{2}-2\alpha$，故面积为 $\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\frac{1}{4}\pi r^2-r^2\alpha$。

相加得

$$\mathrm{P}(R\le r)=\sqrt{r^2-1}+\tfrac{1}{4}\pi r^2-r^2\cos^{-1}(r^{-1})\qquad(1\le r\le\sqrt{2}),$$

此即所求。（在 $r=1$ 时，两条公式都给出 $\frac{1}{4}\pi$；而在 $r=\sqrt{2}$ 时，我们得到 $1+\frac{1}{2}\pi-2\cdot\frac{\pi}{4}=1$，正如所料。）

**第 (ii) 部分**

记 $F(r)=\mathrm{P}(R\le r)$，并以 $f=F'$ 表示概率密度函数。在 $0<r<1$ 上，$f(r)=\frac{1}{2}\pi r$。在 $1<r<\sqrt{2}$ 上，我们需要

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\cos^{-1}(r^{-1})=-\frac{1}{\sqrt{1-r^{-2}}}\cdot\left(-\frac{1}{r^2}\right)=\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}},$$

这里用了当 $r>0$ 时 $\sqrt{1-r^{-2}}=\sqrt{r^2-1}/r$。于是由乘积法则（product rule），

$$\begin{aligned}f(r)&=\frac{r}{\sqrt{r^2-1}}+\tfrac{1}{2}\pi r-\left(2r\cos^{-1}(r^{-1})+\frac{r^2}{r\sqrt{r^2-1}}\right)\\&=\tfrac{1}{2}\pi r-2r\cos^{-1}(r^{-1}).\end{aligned}$$

两个 $\dfrac{r}{\sqrt{r^2-1}}$ 项互相抵消，这是个好兆头。因此

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(R)&=\int_0^{\sqrt{2}}rf(r)\,\mathrm{d}r=\int_0^{\sqrt{2}}\tfrac{1}{2}\pi r^2\,\mathrm{d}r-2\int_1^{\sqrt{2}}r^2\cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r\\&=\frac{\pi(\sqrt{2})^3}{6}-2I=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{3}-2I,\end{aligned}$$

其中 $I = \displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} r^2 \cos^{-1}(r^{-1})\,\mathrm{d}r$。

> **想一想** 怎样才能消去 $I$ 里面的反余弦?

进行分部积分，对 $\cos^{-1}(r^{-1})$ 求导（上面已求得它的导数是代数式），并对 $r^2$ 积分：

$$\begin{aligned} I &= \left[\tfrac{1}{3}r^3\cos^{-1}(r^{-1})\right]_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{3}\cdot\frac{1}{r\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r \\ &= \tfrac{1}{3}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

这里用了 $\cos^{-1}(1/\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$ 及 $\cos^{-1}1 = 0$。（被积函数在 $r=1$ 处无界，但在该处它的表现与 $1/\sqrt{2(r-1)}$ 相若，所以积分收敛（converges）。）因此

$$\mathrm{E}(R) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} - \frac{\sqrt{2}\,\pi}{3} + \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{3}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r,$$

此即所求结果。

### 第 (iii) 部分

$\sqrt{r^2-1}$ 提示我们设 $r = \cosh t$，则 $\mathrm{d}r = \sinh t\,\mathrm{d}t$，且 $\sqrt{r^2-1} = \sinh t$（因为 $t \geq 0$）。积分上下限变为 $t = 0$ 和 $t = T$，其中 $\cosh T = \sqrt{2}$，所以 $\sinh T = 1$，且

$$T = \cosh^{-1}\sqrt{2} = \ln\bigl(\sqrt{2}+\sqrt{2-1}\bigr) = \ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr).$$

于是

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^2}{\sqrt{r^2-1}}\,\mathrm{d}r &= \int_0^T \frac{\cosh^2 t}{\sinh t}\,\sinh t\,\mathrm{d}t = \int_0^T \tfrac{1}{2}(1+\cosh 2t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\sinh t\cosh t\right]_0^T = \tfrac{1}{2}\ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr) + \tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{2}. \end{aligned}$$

乘以 $\frac{2}{3}$，得

$$\mathrm{E}(R) = \tfrac{1}{3}\Bigl(\sqrt{2} + \ln\bigl(\sqrt{2}+1\bigr)\Bigr),$$

此即所求。

## 验算

- $F$ 在 $r=1$ 处连续（两段公式都给出 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$），并在 $r=\sqrt{2}$（即最远的那个角）处达到 1。
- 概率密度函数 $\frac{1}{2}\pi r - 2r\cos^{-1}(r^{-1})$ 在 $r=\sqrt{2}$ 处等于零，理应如此：只有那唯一的角点才有这么远。

- 数值上，$\mathrm{E}(R) = \frac{1}{3}(1.41421 + 0.88137) \approx 0.7652$，合理地介于 $\frac{1}{2}$ 与 $\sqrt{2}$ 之间。以电脑模拟 $4 \times 10^5$ 个随机点，得到的平均距离约为 0.766，而其经验分布函数（empirical distribution function）在多个 $r$ 值上与 $F$ 的差距都在 0.002 以内。

## 常见错误

- 把扇形的圆心角当成 $\frac{\pi}{2} - \alpha$ 而非 $\frac{\pi}{2} - 2\alpha$：在两条边的每一条都切出了一个三角形。
- 弄错 $\cos^{-1}(r^{-1})$ 导数的正负号：两个负号（分别来自 $\cos^{-1}$ 和 $r^{-1}$）互相抵消，所以导数是正的。

## STEP 之外

这是几何概率（geometric probability）的初体验：由单位正方形的一个角到正方形内随机一点的平均距离。与之相关的问题——单位正方形内两个随机点之间的平均距离——有一个类似但更复杂、含有 $\ln(1+\sqrt{2})$ 的闭合形式，是二重积分（double integrals）与变量代换（change of variables）的经典练习。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）介绍了由几何定义的分布，以及如何由分布函数（distribution function）计算期望值。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。