详细解答

STEP III 2024，第 10 题

力学 · 倾倒与滑动

STEP III 2024，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 OCR 提供下载的 2024 年 STEP 试卷（zip 文件）内的 STEP III 试卷：

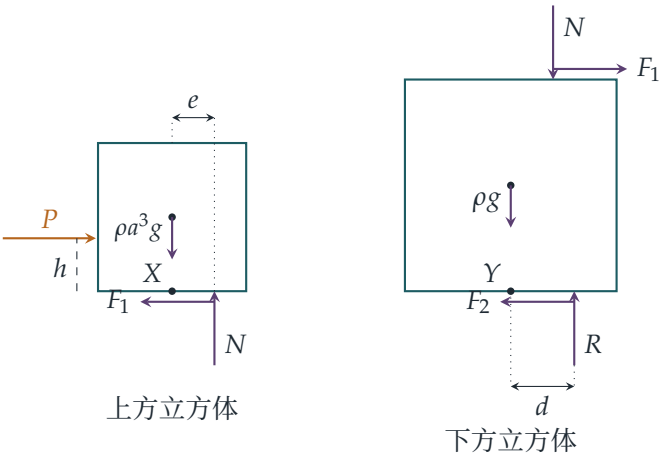
www.ocr.org.uk/Images/725753-2024-past-papers.zip

关键思路

每一部分都是在比较平衡（equilibrium）被打破的四种方式：上方立方体滑动、下方立方体滑动、上方立方体翻倒（topple），或两个立方体一同翻倒。每一种情况各自在某个 P 的临界值发生；当 P 由零开始增大时，哪个临界值最小，哪种情况就先发生。选取适当的点取力矩（moments），即对整个系统取关于 Y 的力矩、对上方立方体单独取关于 X 的力矩，便可以毫不费力地求得第 (i) 部分中法向反作用力（normal reaction）的位置；而当其中一个反作用力到达其作用面的边缘时，翻倒便开始。

解答

我们把两个立方体视为刚体（rigid body）。下方立方体的质量为 ρ，上方立方体的质量为 ρa^3。设 P 水平向右作用，作用点位于下方立方体顶面之上高度 h 处，即离地面高度 $1+h$。由于 P 是水平的，它关于任何一点的力矩只取决于其高度，而与它作用于该面上的哪个位置无关。



图中 N 和 F_1 是两个立方体之间的法向反作用力和摩擦力（friction）（根据牛顿第三定律（Newton's third law），在每个立方体上分别画出），作用点与 X 的距离为 e；R 和 F_2 是地面施加的法向反作用力和摩擦力，作用点与 Y 的距离为 d。

第 (i) 部分

整个系统。外力只有 P、两个重量、R 和 F_2。分解各力，得

$$F_2 = P, \qquad R = \rho g + \rho a^3 g = (1 + a^3)\rho g.$$

对 Y 取力矩。两个重量都沿着通过 Y 的铅垂线作用（每个质心（centre of mass）都在 Y 的正上方），而 F_2 沿着地面通过 Y 作用，所以这些力都没有力矩。剩下的就是高度为 $1 + h$ 的 P，与距离为 d 的 R 互相平衡：

$$R\,d = P(1 + h) \quad \Longrightarrow \quad d = \frac{P(1 + h)}{(1 + a^3)\rho g},$$

此距离由 Y 沿 P 的方向量度。这正是所求的结果。

单独考虑上方立方体。分解各力，得 $F_1 = P$ 及 $N = \rho a^3 g$。对 X 取力矩，重量和 F_1 都没有力矩，所以 $Ne = Ph$，从而

$$e = \frac{Ph}{\rho a^3 g},$$

同样由 X 沿 P 的方向量度。

第 (ii) 部分

在任何物体移动之前，摩擦力分别为两个立方体之间的 $F_1 = P$ 及地面上的 $F_2 = P$。当某接触处所需的摩擦力超过 μ 乘以该处的法向反作用力时，该处便会滑动（slip），所以

$$\text{上方立方体在下方立方体上滑动的条件为} P > \mu\rho a^3 g,$$
$$\text{下方立方体在地面上滑动的条件为} P > \mu(1+a^3)\rho g.$$

由于 $a^3 < 1 + a^3$，第一个临界值必定严格较小。当 P 由零开始增大时（假如没有先发生翻倒），上方立方体会先到达其极限并开始滑动，而此时地面的摩擦力仍远未到达极限。上方立方体一旦开始滑动，它施加于下方立方体的摩擦力为 $\mu\rho a^3 g$，仍然小于地面所能提供的 $\mu(1+a^3)\rho g$，因此下方立方体保持不动。所以打破平衡的是上方立方体的滑动，而不是下方立方体的滑动。

第 (iii) 部分

当作用于一个平面上的物体所受的法向反作用力到达该面的边缘时，物体便即将翻倒。上方立方体底面的半宽为 $\frac{1}{2}a$，下方立方体底面的半宽为 $\frac{1}{2}$。因此，以 ρg 为单位量度所有力，P 的四个临界值为

$$P_{\text{滑动}} = \mu a^3 \text{（上方在下方上）}, \qquad P_{\text{地面}} = \mu(1+a^3),$$
$$P_{\text{上翻}} = \frac{a^4}{2h} \text{（由} e = \tfrac{1}{2}a \text{ 得）}, \qquad P_{\text{同翻}} = \frac{1+a^3}{2(1+h)} \text{（由} d = \tfrac{1}{2} \text{ 得）}.$$

下方立方体翻倒时会把上方立方体一并带倒，这就是为甚么 $d = \frac{1}{2}$ 表示两个立方体一同翻倒。

现在设 $a = 1$，于是 $P_{\text{滑动}} = \mu$、$P_{\text{上翻}} = \frac{1}{2h}$ 及 $P_{\text{同翻}} = \frac{1}{1+h}$。根据第 (ii) 部分，我们可以不理会 $P_{\text{地面}}$。

> ? **想一想** 我们需要担心上方立方体单独翻倒吗?

不需要，但必须加以验证。由于 $h < a = 1$，我们有 $2h < 1 + h$，所以

$$P_{\text{上翻}} = \frac{1}{2h} > \frac{1}{1+h} = P_{\text{同翻}}.$$

两个立方体会在上方立方体能够单独翻倒之前一同翻倒。因此只需比较 $P_{\text{滑动}} = \mu$ 与 $P_{\text{同翻}} = 1/(1+h)$：

- 若 $\mu(1+h) < 1$，则 $\mu < \frac{1}{1+h}$，滑动的临界值先到达，上方立方体在下方立方体上滑动；
- 若 $\mu(1+h) > 1$，则 $\frac{1}{1+h} < \mu$，翻倒的临界值先到达，两个立方体一同翻倒。

第 (iv) 部分

若没有发生滑动，便只需比较 $P_{\text{上翻}}$ 与 $P_{\text{同翻}}$。上方立方体先翻倒，当且仅当

$$\frac{a^4}{2h} < \frac{1+a^3}{2(1+h)} \iff a^4(1+h) < h(1+a^3) \iff a^4 < h\big(1+a^3-a^4\big) = h\big(1+a^3(1-a)\big),$$

其中我们在两边乘以正数 $2h(1+h)$。这正是题目所给的条件，所以在此条件下，打破平衡的是上方立方体的翻倒。

第 (v) 部分

当 $a = \frac{1}{2}$ 时，我们需要满足三个条件。

- 第 (iv) 部分的条件：$h\big(1+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}\big) > \frac{1}{16}$，即 $\frac{17}{16}h > \frac{1}{16}$，所以 $h > \frac{1}{17}$。
- 题目设置要求 $h < a = \frac{1}{2}$。
- 翻倒之前没有滑动：$P_{\text{上翻}} < P_{\text{滑动}}$，即 $\dfrac{1/16}{2h} < \dfrac{\mu}{8}$，亦即 $\mu > \dfrac{1}{4h}$。（根据第 (ii) 部分，在地面上的滑动永远不会最先发生。）由于我们同时需要 $\mu < 1$，这要求 $h > \frac{1}{4}$。

所以选取 $h = \frac{2}{5}$，它满足 $\frac{1}{4} < h < \frac{1}{2}$ 及 $h > \frac{1}{17}$。这时我们需要 $\frac{5}{8} < \mu < 1$；取 $\mu = \frac{3}{4}$。于是各临界值（以 ρg 为单位）为

$$P_{\text{上翻}} = \tfrac{5}{64} \approx 0.078, \quad P_{\text{滑动}} = \tfrac{3}{32} \approx 0.094, \quad P_{\text{同翻}} = \tfrac{45}{112} \approx 0.402, \quad P_{\text{地面}} = \tfrac{27}{32} \approx 0.844.$$

最小的是 $P_{\text{上翻}}$，所以当 P 增大时，上方立方体会在任何滑动发生之前翻倒：第 (iv) 部分的情况确实会出现。

验算

- 当 $P \to 0$ 时，d 和 e 都趋向 0：没有推力时，每个反作用力都作用于质心的正下方，理应如此。
- 单独对下方立方体取力矩（其重量、距离为 d 的 R 和 F_2，以及方向相反、与 X 距离为 e 的 N 和 F_1），得 $Rd = Ne + F_1 \cdot 1$，即 $P(1+h) = Ph + P$。所以第 (i) 部分的两个答案互相吻合。
- 对于 $a = \frac{1}{2}$、$h = \frac{2}{5}$、$\mu = \frac{3}{4}$，上述四个临界值都经过精确计算；而第 (ii)–(iv) 部分中的比较亦已用电脑就大量随机选取的 a、h 和 μ 加以验证。

常见错误

- 在第 (iii) 部分中，只比较滑动与两个立方体一同翻倒，却从未证明上方立方体不会先翻倒。
- 对上方立方体取关于地面上某点的力矩，这样会把接触面上的摩擦力 F_1 牵涉进来；对 X 取力矩则可避免。
- 在整个系统的力矩方程中，误把 h 而不是 $1+h$ 当作 P 离地面的高度。

STEP 之外

这里每一种失效方式都是关于各力的一条不等式，只要所有不等式同时成立，平衡便得以维持；最先失效的，就是临界值最小的那一条。这种“一组线性约束中有一条起决定作用（binding）”的想法，正是工程学中用于砌体及堆叠结构的极限分析（limit analysis）的核心，更广泛而言亦是线性规划（linear programming）的核心。若想深入了解摩擦力、扭矩（torque）及刚体静力学，可参阅 Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。